

## CAPÍTULO 5

### Introducción a métodos numéricos para EDPs

Las aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas son uno de los métodos más simples y antiguos para resolver ecuaciones diferenciales. Ya eran conocidas por L. Euler (1707-1783) hacia 1768 en una dimensión espacial y probablemente fueron extendidas a dos dimensiones por C. Runge (1856-1927) hacia 1908. El advenimiento de las técnicas de diferencias finitas en aplicaciones numéricas comenzó a principios de los años 50 y su desarrollo fue estimulado por la aparición de las computadoras, que ofrecieron un marco conveniente para abordar problemas complejos de ciencia y tecnología. Se han obtenido resultados teóricos durante las últimas cinco décadas en relación con la precisión, estabilidad y convergencia del método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales.

#### 5.1 Método de diferencias finitas

##### 5.1.1 Principio general

El principio de los métodos de diferencias finitas es similar a los esquemas numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Consiste en aproximar el operador diferencial reemplazando las derivadas en la ecuación mediante cocientes diferenciales. El dominio se particiona en espacio y en tiempo, y se calculan aproximaciones de la solución en los puntos espaciales o temporales. El error entre la solución numérica y la solución exacta está determinado por el error cometido al pasar de un operador diferencial a uno de diferencias. Este error se denomina error de discretización o error de truncamiento. El término error de truncamiento refleja el hecho de que se usa una parte finita de una serie de Taylor en la aproximación.

Para simplificar, consideraremos el caso unidimensional. El concepto principal detrás de cualquier esquema de diferencias finitas está relacionado con la definición de la derivada de una función suave  $u$  en un punto  $x \in \mathbb{R}$ :

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

y con el hecho de que cuando  $h$  tiende a 0 (sin desaparecer), el cociente en el lado derecho proporciona una “buena” aproximación de la derivada. En otras palabras,  $h$  debe ser suficientemente pequeño para obtener una buena aproximación. Queda por indicar qué exactamente se considera una buena

aproximación y en qué sentido. De hecho, la aproximación es buena cuando el error cometido en esta aproximación (es decir, al reemplazar la derivada por el cociente diferencial) tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero. Si la función  $u$  es suficientemente suave en el entorno de  $x$ , es posible cuantificar este error usando una expansión de Taylor.

### 5.1.2 Serie de Taylor

Supongamos que la función  $u$  es  $C^2$  en el entorno de  $x$ . Para cualquier  $h > 0$  tenemos:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x+h_1),$$

donde  $h_1$  es un número entre 0 y  $h$  (es decir,  $x+h_1$  es un punto de  $]x, x+h[$ ). Para el tratamiento de los problemas, es conveniente retener solo los dos primeros términos de la expresión anterior:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h^2),$$

donde el término  $O(h^2)$  indica que el error de la aproximación es proporcional a  $h^2$ . De la ecuación anterior deducimos que existe una constante  $C > 0$ , tal que para  $h > 0$  suficientemente pequeño tenemos:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch,$$

donde  $C = \sup_{y \in [x, x+h_0]} \frac{|u''(y)|}{2}$ , para  $h \leq h_0$  ( $h_0 > 0$  dado). El error cometido al reemplazar la derivada  $u'(x)$  por el cociente diferencial es del orden de  $h$ . Se dice que la aproximación de  $u'$  en el punto  $x$  es consistente en el primer orden. Esta aproximación es conocida como la diferencia progresiva de  $u'$ . De manera más general, definimos una aproximación de orden  $p$  de la derivada.

**Definición 5.1.1** La aproximación de la derivada  $u'$  en el punto  $x$  es de orden  $p$  ( $p > 0$ ) si existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que el error entre la derivada y su aproximación está acotado por  $Ch^p$  (es decir, es exactamente  $O(h^p)$ ).

De igual manera, podemos definir la diferencia regresiva de primer orden de  $u'$  en el punto  $x$  como:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + O(h^2).$$

Obviamente, se pueden considerar otras aproximaciones. Con el fin de mejorar la precisión de la aproximación, definimos una aproximación consistente, llamada aproximación central de diferencias, tomando en cuenta los puntos  $x-h$  y  $x+h$ . Supongamos que la función  $u$  es tres veces diferenciable en las proximidades de  $x$ :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi_+),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi_-),$$

donde  $\xi_+ \in ]x, x + h[$  y  $\xi_- \in ]x - h, x[$ . Restando estas dos expresiones obtenemos, gracias al teorema del valor medio:

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi),$$

donde  $\xi$  es un punto de  $]x - h, x + h[$ . Así, para cada  $h \in ]0, h_0[$ , tenemos la siguiente cota en el error de la aproximación:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2,$$

donde  $C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(3)}(y)|}{6}$ . Esto define una aproximación consistente de segundo orden para  $u'$ .

**Remark 5.1.1** *El orden de la aproximación está relacionado con la regularidad de la función  $u$ . Si  $u$  es  $C^2$  continua, entonces la aproximación es consistente solo en el primer orden.*

### 5.1.3 Aproximación de la segunda derivada

**Lemma 5.1.1** *Supongamos que  $u$  es una función de clase  $C^4$  en un intervalo  $[x - h_0, x + h_0]$ ,  $h_0 > 0$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $h \in ]0, h_0[$  tenemos:*

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq Ch^2. \quad (5.1.1)$$

El cociente diferencial  $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$  es una aproximación consistente de segundo orden de la segunda derivada  $u''$  de  $u$  en el punto  $x$ .

**Demostración:** *Utilizamos expansiones de Taylor hasta el cuarto orden para lograr el resultado:*

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_+),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_-),$$

donde  $\xi_+ \in ]x, x + h[$  y  $\xi_- \in ]x - h, x[$ . Como anteriormente, el teorema del valor medio nos permite escribir:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi),$$

donde  $\xi \in ]x - h, x + h[$ . Por lo tanto, deducimos la relación con la constante

$$C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(4)}(y)|}{12}.$$

■

**Remark 5.1.2** *De igual manera, la estimación del error depende de la regularidad de la función  $u$ . Si  $u$  es de clase  $C^3$ , entonces el error es del orden de  $h$  solamente.*

## 5.2 Formulación en diferencias finitas para un problema 1D

Consideramos un dominio acotado  $\Omega = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  y  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que resuelve el problema de Dirichlet no homogéneo:

$$\mathcal{D} \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

donde  $c$  y  $f$  son dos funciones dadas, definidas en  $\bar{\Omega}$ ,  $c \geq 0$ .

### 5.2.1 Teoría variacional y aproximación

Es conocido que si  $c \in L^\infty(\Omega)$  y  $f \in L^2(\Omega)$ , entonces la solución  $u$  de este problema existe. Además, si  $c = 0$ , tenemos la formulación explícita de  $u$  como:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy + \alpha + x(\beta - \alpha),$$

donde  $G(x, y) = x(1 - y)$  si  $y \geq x$  y  $G(x, y) = y(1 - x)$  si  $y < x$ . Sin embargo, cuando  $c \neq 0$ , no hay una fórmula explícita que nos dé la solución  $u$ . Así, debemos resignarnos a encontrar una aproximación de la solución.

El primer paso para derivar una aproximación en diferencias finitas de la ecuación (5.2.1) es dividir el intervalo unitario en un número finito de subintervalos. Aquí surge un concepto fundamental de las aproximaciones de diferencias finitas: la solución numérica no está definida en todo el dominio  $\Omega$ , sino solo en un número finito de puntos en  $\Omega$ .

Introducimos los puntos de la malla equidistantes  $\{x_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$  dados por  $x_j = jh$ , donde  $N$  es un entero y la distancia  $h$  está dada por  $h = 1/(N + 1)$ . Típicamente, se busca que la distancia se haga muy pequeña a medida que el número de puntos de la malla aumenta. En el límite del dominio  $\Omega$ , tenemos  $x_0 = 0$  y  $x_{N+1} = 1$ . En cada uno de estos puntos, buscamos el valor numérico de la solución,  $u_j = u(x_j)$ . Imponemos que  $u(x_0) = \alpha$  y  $u(x_{N+1}) = \beta$  y usamos el cociente diferencial introducido en la sección anterior para aproximar la derivada de segundo orden de la ecuación (5.2.1).

Los valores desconocidos del problema discreto son todos los valores  $u(x_1), \dots, u(x_N)$  e introducimos el vector  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$  con componentes  $u_j$ , para  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

### 5.2.2 Un esquema de diferencias finitas

Supongamos que las funciones  $c$  y  $f$  son al menos tales que  $c \in C^0(\bar{\Omega})$  y  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ . El problema entonces consiste en encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$ , tal que  $u_i \approx u(x_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , donde  $u$  es la solución del problema (5.2.1). Introduciendo la aproximación de la derivada de segundo orden mediante un cociente diferencial, consideramos el siguiente problema discreto:

$$\mathcal{D}_h = \begin{cases} -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j), & j \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

El problema  $\mathcal{D}$  ha sido discretizado mediante un método de diferencias finitas basado en un esquema centrado de tres puntos para la derivada de segundo orden.

El problema (5.2.2) se puede escribir en forma matricial como:

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h,$$

donde  $A_h$  es la matriz tridiagonal definida como:

$$A_h = A_h^{(0)} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c(x_N) \end{pmatrix},$$

con

$$A_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

La pregunta que surge de esta formulación está relacionada con la existencia de una solución. En otras palabras, tenemos que determinar si la matriz  $A_h$  es invertible o no. La respuesta está dada por la siguiente proposición.

**Proposición 5.2.1** *Supongamos que  $c \geq 0$ . Entonces, la matriz  $A_h$  es simétrica y definida positiva.*

**Demostración:** *Observamos que  $A_h$  es simétrica. Consideremos un vector  $\mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ . Dado que  $c \geq 0$ , tenemos:*

$$\mathbf{v}^t A_h \mathbf{v} = \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} + \sum_{i=1}^N c(x_i) v_i^2 \geq \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v},$$

*y el problema se reduce a mostrar que  $A_h^{(0)}$  es definida positiva. Notamos que:*

$$h^2 \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} = v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + \cdots + (v_{N-1} - v_N)^2 + v_N^2,$$

*y así  $\mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} \geq 0$ . Además, si  $\mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} = 0$ , entonces todos los términos  $v_{i+1} - v_i = v_1 = v_N = 0$ . Por lo tanto, concluimos que todos los  $v_i = 0$  y el resultado se sigue. ■*

Podemos resumir el método de diferencias finitas para el problema (5.2.1) en la siguiente tabla:

Teoría (continuo)	Diferencias finitas (discreto)
Dominio $\Omega = [0, 1]$	$\mathbb{I}_N = \{0, \frac{1}{N+1}, \dots, 1\}$
Desconocido $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^2(\Omega)$	$\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$
Condiciones $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$	$u_0 = \alpha, u_{N+1} = \beta$
Ecuación $-u'' + cu = f$	$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j)$

### 5.2.3 Esquema consistente

La fórmula utilizada en los esquemas numéricos proviene de una aproximación de la ecuación usando una expansión de Taylor. La noción de consistencia y precisión ayuda a comprender qué tan bien un esquema numérico aproxima una ecuación. Introducimos una definición formal de consistencia que puede ser utilizada para cualquier ecuación diferencial parcial definida en un dominio  $\Omega$ , y se denota como:

$$(Lu)(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

donde  $L$  denota un operador diferencial. La notación  $(Lu)$  indica que la ecuación depende de  $u$  y de sus derivadas en cualquier punto  $x$ . Un esquema numérico puede escribirse, para cada índice  $j$ , en una forma más abstracta como:

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Por ejemplo, en el problema con condiciones de contorno (5.2.1), el operador  $L$  es:

$$(Lu)(x) = -u''(x) + c(x)u(x),$$

y el problema puede escribirse de la siguiente forma: *encontrar*  $u \in C^2(\Omega)$  tal que

$$(Lu)(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega. \quad (5.2.3)$$

Definimos el operador  $L_h$  por:

$$(L_h u)(x_j) = \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j), \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

y el problema discreto (5.2.2) se puede formular de la siguiente manera: *encontrar*  $u$  tal que

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\}.$$

**Definición 5.2.1** *Un esquema de diferencias finitas se dice que es consistente con la ecuación diferencial parcial que representa, si para cualquier solución suficientemente suave  $u$  de esta ecuación, el error de truncamiento del esquema, correspondiente al vector  $\varepsilon_h \in \mathbb{R}^N$  cuyos componentes se definen como:*

$$(\varepsilon_h)_j = (L_h u)(x_j) - f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\},$$

*tiende uniformemente a cero con respecto a  $x$  cuando  $h$  tiende a cero, es decir, si:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h\|_\infty = 0.$$

Además, si existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $u$  y de sus derivadas, tal que, para todo  $h \in ]0, h_0]$  (dado  $h_0 > 0$ ) tenemos:

$$\|\varepsilon_h\| \leq Ch^p,$$

con  $p > 0$ , entonces se dice que el esquema es de orden de precisión  $p$  (es preciso de orden  $p$ ) para la norma  $\|\cdot\|$ .

La definición establece que el error de truncamiento se define aplicando el operador de diferencias  $L_h$  a la solución exacta  $u$ . Esto significa que un esquema consistente implica que la solución exacta casi resuelve el problema discreto.

**Lemma 5.2.1** *Supongamos que  $u \in C^4(\Omega)$ . Entonces, el esquema numérico (5.2.2) es consistente y preciso de segundo orden en espacio para la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

**Demostración:** Utilizando el hecho de que  $-u'' + cu = f$  y suponiendo que  $u \in C^4(\Omega)$ , tenemos

$$\varepsilon_h(x_j) = -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j) - f(x_j) \quad (5.2.4)$$

$$= -u''(x_j) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j) + c(x_j)u(x_j) - f(x_j) \quad (5.2.5)$$

$$= \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j), \quad (5.2.6)$$

donde cada  $\xi_j \in ]x_{j-1}, x_{j+1}[$ . Así, tenemos:

$$\|\varepsilon_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in \Omega} |u^{(4)}(y)|,$$

y el resultado se sigue. ■

**Remark 5.2.1** *Dado que la dimensión del espacio  $N$  está relacionada con  $h$  por la relación  $h(N+1) = 1$ , tenemos:*

$$\|\varepsilon_h\|_1 = O(h), \quad y \quad \|\varepsilon_h\|_2 = O(h^{3/2}).$$

El error de consistencia es un primer paso hacia el análisis del error de convergencia del método. Sin embargo, no es suficiente para analizar un esquema numérico.

**Theorem 5.2.1** *Supongamos que  $c \geq 0$  y que la solución del problema  $\mathcal{D}$  es de clase  $C^4(\Omega)$ . Entonces, el esquema de diferencias finitas  $\mathcal{D}_h$  es de segundo orden (de convergencia) para la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Además, si  $u$  y  $u_h$  son soluciones de (5.2.1) y (5.2.2), tenemos la siguiente estimación:*

$$\|u - u_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{x \in \Omega} |u^{(4)}(x)|.$$

## 5.3 Esquemas de diferencias finitas para problemas dependientes del tiempo

Consideremos un problema de contorno dependiente del tiempo, de primer orden, planteado en un dominio acotado  $\Omega = ]0, 1[$ : encontrar  $u : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & \forall t \in ]0, T[, \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & \forall t \in ]0, T[, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

donde  $f(t, x)$  es un término fuente dado y  $\nu \geq 0$ . Esta ecuación es la conocida ecuación del calor que describe la distribución del calor en un dominio dado a lo largo del tiempo. Es la ecuación diferencial parcial parabólica prototípica. La función  $u(\cdot, \cdot)$ , solución de esta ecuación, describe la temperatura en una ubicación dada  $x$  en el tiempo. El análisis de esta ecuación fue pionero por el físico francés J. Fourier (1768-1830), quien inventó métodos influyentes para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

### 5.3.1 El problema continuo

Mostraremos que este problema tiene una única solución suave que depende de manera continua de los datos. La siguiente estimación indica la continuidad, con respecto a los datos  $u_0$  y  $f$ , de la solución  $u$ .

**Lemma 5.3.1** *Supongamos que  $u_0 \in L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Si  $u$  es una solución suficientemente suave del problema (5.3.1), entonces tenemos la estimación:*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)}.$$

**Demostración:** Dado que la ecuación es lineal, tenemos  $u = v + w$ , donde  $v$  es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in ]0, T[, \\ v(t, 0) = v(t, 1) &= 0, \quad \forall t \in ]0, T[, \quad v(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

y de manera similar,  $w$  es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= f(t, x), \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in ]0, T[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) &= 0, \quad \forall t \in ]0, T[, \quad w(0, x) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos considerar estos dos problemas por separado para  $v$  y  $w$ . Con respecto al primer problema, multiplicamos la ecuación por  $v(x, t)$  e integramos con respecto a  $x \in ]0, 1[$ . Aplicando la regla de la cadena y la integración por partes, y teniendo en cuenta las condiciones de contorno homogéneas, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) + \nu \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = 0.$$

Dado que el segundo término es positivo, deducimos:

$$\forall t \in ]0, T[, \quad \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) \leq 0.$$

Ahora, integramos con respecto a la variable  $t \in ]0, s[, s \in [0, T]$ , y obtenemos:

$$\forall s \in [0, T], \quad \|v(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Procedemos de manera similar para el término  $w$ , para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} w^2(t, x) dx \right) + \nu \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx &= \int_{\Omega} (fw)(t, x) dx \\ &\leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La desigualdad de Poincaré conduce a la estimación:

$$\|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

y así tenemos (observando que  $2ab \leq a^2 + b^2$ ):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \left( \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integramos en  $]0, s[$  para  $s \in [0, T]$  y teniendo en cuenta la condición inicial  $w(x, 0) = 0$ , obtenemos:

$$\forall s \in [0, T], \quad \|w(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^s \|f(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq (\|f\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)})^2,$$

y, combinando esta estimación con la estimación para  $v$ , el resultado sigue. ■

Este resultado es importante ya que proporciona la unicidad de una solución regular.

**Corolario 5.3.1** Supongamos que  $u_0 \in L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Entonces, si el problema (5.3.1) tiene una solución regular, esta solución es única.

**Demostración:** Supongamos que  $u_1(t, x)$  y  $u_2(t, x)$  son dos soluciones regulares del problema (5.3.1). Entonces, si denotamos su diferencia por  $u = u_1 - u_2$ , obtenemos un problema similar al inicial pero donde tanto los datos iniciales  $u_0$  como el término fuente son cero:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ u(0, x) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, usando la estimación anterior para este problema, concluimos que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

y por lo tanto  $u = u_1 - u_2 = 0$ , es decir, las soluciones regulares son idénticas. ■

### 5.3.2 Estimación de la energía

Es común introducir la noción de energía de la solución  $u$  en el tiempo  $t$  como:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx = \frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Esta no es la energía física del sistema sino más bien una herramienta matemática utilizada para analizar el comportamiento de la solución. Veremos que usando el Lema (5.3.1) y sin el término fuente  $f$ , la energía es una función no creciente en el tiempo. Este resultado indica claramente que esta energía está controlada en cualquier instante  $t$  por la energía en el instante inicial  $t = 0$ , que es dada. Esta importante propiedad de la ecuación del calor debe ser preservada en la resolución numérica del problema.

Introducimos un resultado preliminar antes de proporcionar una estimación de la energía.

**Lemma 5.3.2** (Grönwall) Sean  $\alpha, \beta$  dos números reales y sea  $u$  una función real no negativa definida en  $\mathbb{R}_+$  tal que:

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

entonces  $u(t) \leq \alpha \exp(\beta t)$ .

**Demostración:** Definimos  $v(t) = \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , de modo que  $v(t) \geq u(t) \geq 0$ . Derivando y usando la regla de la cadena obtenemos que  $v'(t) = \beta u(t) \leq \beta v(t)$ , y por lo tanto

$$v'(t) - \beta v(t) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Multiplicando por  $\exp(-\beta t)$  e integrando entre 0 y  $t$  obtenemos:

$$\int_0^t \exp(-\beta s) v'(s) ds - \beta \int_0^t \exp(-\beta s) v(s) ds \leq 0,$$

y después de integrar por partes tenemos:

$$\int_0^t \exp(-\beta s) v'(s) ds = \beta \int_0^t \exp(-\beta s) v(s) ds + \exp(-\beta t) v(t) - v(0),$$

y finalmente el resultado sigue:  $v(t) \leq v(0) \exp(\beta t) = \alpha \exp(\beta t)$ . ■

**Lemma 5.3.3** (Estimación de la energía) Supongamos que  $u_0 \in L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Si  $u$  es una solución del problema (5.3.1) suficientemente suave, entonces tenemos la siguiente estimación:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \exp(t) \left( \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds \right).$$

**Demostración:** Procedemos como antes, multiplicamos la ecuación (5.3.1) por  $u$  e integramos con respecto a la variable  $x$  y luego con respecto a  $t$  para obtener:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx - \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(s, x) \right)^2 dx ds$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^t \int_{\Omega} f(s, x) u(s, x) \, dx ds \\
 &\leq \int_0^t \int_{\Omega} f^2(s, x) \, dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2(s, x) \, dx ds.
 \end{aligned}$$

De aquí deducimos que:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) \, dx \leq \int_{\Omega} u_0^2(x) \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) \, dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2(s, x) \, dx ds.$$

Ahora, invocamos el lema de Grönwall con

$$\alpha = \int_{\Omega} u_0^2(x) \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) \, dx ds, \quad \beta = 1,$$

para obtener:

$$\int_{\Omega} u^2(s, x) \, dx \leq \exp(t) \left( \int_{\Omega} u_0^2(x) \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) \, dx ds \right), \quad \forall T > 0,$$

y el resultado sigue. ■

Las estimaciones dadas por los Lemas (5.3.1) y (5.2.3) son a menudo referidas como estimaciones de estabilidad, ya que expresan que el tamaño de la solución puede estar acotado por el tamaño de los datos iniciales  $u_0$  y  $f$ . Una consecuencia de estos resultados es que pequeñas perturbaciones de orden  $\epsilon$  en los datos iniciales conducen a pequeñas perturbaciones del mismo orden en la solución.

**Corolario 5.3.2** *Supongamos que los datos iniciales  $u_0$  y  $f$  son ligeramente perturbados y reemplazados por nuevos datos  $u_{0,\epsilon} \in L^2(\Omega)$  y  $f_{\epsilon} \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$  tales que:*

$$\|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon, \quad y \quad \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)} \leq \epsilon.$$

Entonces, si  $u_{\epsilon}(t, \cdot)$  denota la nueva solución del problema (5.3.1), tenemos la estimación:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot) - u_{\epsilon}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)} \leq 2\epsilon.$$

**Demostración:** *Dado que el problema (5.3.1) es lineal,  $u - u_{\epsilon}$  resuelve el problema para el término fuente  $f - f_{\epsilon}$  y los datos iniciales  $u_0 - u_{0,\epsilon}$ . Es fácil ver que para todo  $t \in [0, T]$  tenemos:*

$$\|u(t, \cdot) - u_{\epsilon}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)} \leq 2\epsilon,$$

y el resultado sigue. ■

### 5.3.3 Un esquema explícito

Para discretizar el dominio  $[0, T] \times \bar{\Omega}$ , introducimos puntos de malla equidistribuidos correspondientes a un tamaño de paso espacial  $h = 1/(N + 1)$  y a un paso temporal  $\delta = 1/(M + 1)$ , donde  $M, N$  son enteros positivos, y definimos los nodos de una malla regular:

$$(t_n, x_j) = (n\delta, jh), \quad n \in \{0, \dots, M + 1\}, \quad j \in \{0, \dots, N + 1\}.$$

Denotamos  $u_j^n$  como el valor de una solución aproximada en el punto  $(t_n, x_j)$  y  $u(t, x)$  como la solución exacta del problema (5.3.1). Los datos iniciales también deben ser discretizados como:

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \forall j \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (5.3.2)$$

Finalmente, las condiciones de contorno homogéneas se discretizan como:

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall n \in \{0, \dots, M+1\}. \quad (5.3.3)$$

El problema entonces consiste en encontrar, en cada paso temporal, un vector  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$ , tal que sus componentes sean los valores  $\{u_j^n\}_{1 \leq j \leq N}$ .

Introduciendo la aproximación de la derivada espacial de segundo orden dada por la fórmula (5.1.1), y considerando una aproximación de diferencias progresivas para la derivada temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta},$$

obtenemos el siguiente esquema, junto con las condiciones iniciales (5.3.2) y las condiciones de contorno (5.3.3), para  $n \in \{0, \dots, M\}$  y  $j = \{1, \dots, N\}$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j). \quad (5.3.4)$$

Este esquema se denomina explícito porque los valores  $\{u_j^{n+1}\}_{1 \leq j \leq N}$  en el tiempo  $t_{n+1}$  se calculan utilizando los valores del nivel de tiempo anterior  $t_n$ . De hecho, este sistema puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta} + A_h U^n = C^n, \quad \forall n \in \{0, \dots, M\},$$

donde la matriz  $A_h$  y el vector  $C^n$  se definen como:

$$A_h = \frac{\nu}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$C^n = \begin{pmatrix} f(t_n, x_1) \\ \vdots \\ f(t_n, x_N) \end{pmatrix},$$

y con los datos iniciales:

$$U^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_N^0 \end{pmatrix}.$$

Para analizar el esquema numérico, introducimos una norma en  $\mathbb{R}^N$ :

$$\|u\|_p = \left( \sum_{j=1}^N h |u_j|^p \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty, \quad (5.3.5)$$

donde el caso límite corresponde a  $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j|$ . Nótese que esta norma depende del tamaño de paso  $h = 1/(N + 1)$ . A través del parámetro de peso  $h$ , la norma  $\|u\|_p$  es idéntica a la norma  $L^p(\Omega)$  para funciones constantes por partes en cada intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  del dominio  $\Omega = [0, 1]$ .

**Lemma 5.3.4** *El esquema numérico (5.3.4) es consistente y de primer orden en el tiempo para la norma  $\|\cdot\|_\infty$  y de segundo orden en el espacio para la norma  $\|\cdot\|_2$ .*

**Demostración:** Consideremos una función de clase  $C^2$  en el tiempo y  $C^4$  en el espacio  $u(t, x)$ . Escribimos:

$$\epsilon_h(u)_j^n = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta} - \nu \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} - f(t_n, x_j).$$

Si  $u$  es solución de la ecuación del calor, entonces tenemos:

$$\epsilon_h(u)_j^n = A_j - \nu B_j,$$

donde definimos

$$A_j = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j),$$

$$B_j = \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j).$$

Usando una expansión de Taylor respecto a la variable temporal (manteniendo  $x_j$  fijo) obtenemos, para  $\tau \in ]t_n, t_{n+1}[$ :

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + \delta \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau, x_j),$$

y por lo tanto

$$A_j = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau, x_j),$$

y de manera similar para  $B_j$  obtenemos para  $\xi \in ]x_j, x_{j+1}[$  (Lema (5.1.1)):

$$B_j = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, \xi).$$

Obtenemos fácilmente la consistencia y el orden de precisión del esquema explícito a partir de estas fórmulas. ■

**Corolario 5.3.3** *Si la razón  $\nu\delta/h^2 = 1/6$  se mantiene constante cuando  $\delta$  y  $h$  tienden a cero, entonces el esquema explícito (5.3.4) es de segundo orden en el tiempo y de cuarto orden en el espacio.*

### 5.3.4 Otros esquemas

Cambiar la aproximación de la derivada temporal por una diferencia hacia atrás resultaría en el siguiente esquema implícito:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j),$$

que requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para calcular los valores  $\{u_j^n\}_{1 \leq j \leq N}$  en el tiempo  $t_n$  utilizando los valores del nivel de tiempo anterior  $t_{n-1}$ . El esquema puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\delta} + A_h U^n = C^n, \quad \forall n \in \{1, \dots, M+1\}, \quad (5.3.6)$$

donde la matriz  $A_h$  y los vectores  $C^n$  y  $U^0$  son idénticos a los correspondientes términos en el esquema explícito (5.3.4). Sin embargo, calcular los valores  $u_j^n$  con respecto a los valores  $u_j^{n-1}$  requiere encontrar la inversa de la matriz tridiagonal  $A_h$ .

**Proposición 5.3.1** *La matriz  $A_h$  es definida positiva y, por lo tanto, es invertible.*

**Lemma 5.3.5** *El esquema numérico (5.3.6) es consistente y de primer orden en el tiempo para la norma  $\|\cdot\|_\infty$  y de segundo orden en el espacio para la norma  $\|\cdot\|_2$ .*

**Demostración:** *Se deja esta demostración como ejercicio.* ■

Utilizando una combinación convexa de los esquemas explícito e implícito, definimos, para  $0 \leq \theta \leq 1$ , el llamado esquema  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\delta} - \theta \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - (1-\theta) \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} \\ = \theta f(t_n, x_j) + (1-\theta) f(t_{n-1}, x_j), \end{aligned}$$

que da el esquema explícito (resp. implícito) si  $\theta = 0$  (resp.  $\theta = 1$ ). Nótese que este esquema es implícito para  $\theta \neq 0$ . Para el valor  $\theta = 1/2$ , el esquema se llama esquema de Crank-Nicholson.

Todos estos esquemas son esquemas de múltiples niveles (aquí de dos niveles), ya que involucran dos índices temporales  $u^n$  y  $u^{n-1}$ , de modo que la matriz del sistema es tridiagonal, es decir, tiene elementos no nulos solo en la diagonal y en las posiciones inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la diagonal. Aquí hay algunos otros ejemplos de esquemas de múltiples niveles:

**Esquema de Richardson:**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j)$$

**Esquema de DuFort-Frankel:**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta} + \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} = f(t_n, x_j)$$

**Esquema de Gear:**

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = f(t_n, x_j).$$

Podemos entonces considerar una forma más general para estos sistemas:

$$B_l U^{n+l} + B_{l-1} U^{n+l-1} + \dots + B_0 U^n + \dots + B_{-m} U^{n-m} = C^n,$$

para  $n \geq m$ ,  $l, m \geq 0$ ,  $l+m \geq 1$ ,  $B_l$  invertible y  $U^0, \dots, U^{l+m-1}$  dados. Dicho esquema involucra  $l+m$  niveles. Si la matriz  $B_l$  es diagonal, el esquema es explícito, e implícito de otro modo.

### 5.3.5 Estabilidad y análisis de Fourier

En términos generales, la inestabilidad consiste en la aparición de oscilaciones no acotadas en la solución numérica.

**Definición 5.3.1** *Un esquema de diferencias finitas se dice que es estable para la norma  $\|\cdot\|_p$  definida por (5.3.5), si existen dos constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$ , independientes de  $h$  y  $\delta$ , tales que cuando  $h$  y  $\delta$  tienden a cero:*

$$\|u^n\|_p \leq C_1 \|u^0\|_p + C_2 \|f\|_p, \quad \forall n \geq 0,$$

*independientemente de los datos iniciales  $u^0$  y del término fuente  $f$ .*

**Remark 5.3.1** *Supongamos que  $f \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$  y que consideramos la norma  $\|\cdot\|_p$  en  $\mathbb{R}^N$ . Entonces, la estimación anterior de estabilidad es exactamente el análogo discreto de la estimación proporcionada por el Lema (5.3.1) (con  $C_1 = 1$  y  $C_2 = \sqrt{T}$ ).*

**Remark 5.3.2** *Dado que todas las normas son equivalentes en  $\mathbb{R}^N$ , podría parecer tentador concluir que la estabilidad con respecto a una norma implica estabilidad con respecto a todas las demás normas. Desafortunadamente, esto no es cierto porque, en la definición, el límite es uniforme con respecto a  $h$ , pero las normas  $\|\cdot\|_p$  dependen de  $h$ .*

## 5.4 Implementación en Python

En lo que sigue se consideran las siguientes aproximaciones de las derivadas,

$$\begin{aligned} u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, && \text{(diferencia centrada)} \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - u_i}{h}, && \text{(diferencia atrasada)} \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i+1}}{h}, && \text{(diferencia adelantada)} \end{aligned}$$

donde  $h = \frac{b-a}{N+1}$  el paso en  $x$ ,  $x_i = a + ih$  (discretización del intervalo  $[a, b]$ ) para  $i = 1, \dots, N$ , a menos que se diga explícitamente otra cosa. Si necesita ver como se obtienen las aproximaciones anteriores vea Philippe G. Ciarlet, Introduction to numerical linear algebra and optimisation.

### 5.4.1 Aplicación a una EDO

**Ejemplo 1:** Considere el problema  $x^2 u''(x) + 4x u'(x) + 2u(x) = 2 \ln(x) + 3$ , con condiciones de contorno  $u(1) = 0$ ,  $u(2) = 1/4 + \ln(2)$ , considerando  $h \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$ . La solución exacta

es  $u(x) = x^{-1} - x^{-2} + \ln(x)$ .

Una aproximación del problema a través del método de diferencias finitas viene dado por,

$$\frac{x_i^2}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + 4\frac{x_i}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + 2u_i = f_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\},$$

$$u_0 = 0, u_{N+1} = 1/4 + \ln(2),$$

el cual puede ser reescrito de la siguiente manera

$$(x_i^2 - 2hx_i)u_{i-1} + (2h - 2x_i^2)u_i + (x_i^2 + 2hx_i)u_{i+1} = h^2 f_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.4.1)$$

$$u_0 = 0, u_{N+1} = 1/4 + \ln(2),$$

Antes de continuar notemos lo siguiente

- Si  $i = 1$

$$\underbrace{(x_1^2 - 2hx_1)u_0}_{u_0=0} + (2h - 2x_1^2)u_1 + (x_1^2 + 2hx_1)u_2 = h^2 f_1$$

- Si  $1 < i < N$

$$(x_i^2 - 2hx_i)u_{i-1} + (2h - 2x_i^2)u_i + (x_i^2 + 2hx_i)u_{i+1} = h^2 f_i$$

- Si  $i = N$

$$(x_N^2 - 2hx_N)u_{N-1} + (2h - 2x_N^2)u_N + (x_N^2 + 2hx_N)u_{N+1} = h^2 f_N$$

$$\Rightarrow (x_N^2 - 2hx_N)u_{N-1} + (2h - 2x_N^2)u_N = h^2 f_N - (x_N^2 + 2hx_N)u_{N+1}.$$

De esta manera el método de diferencias finitas induce el siguiente sistema de ecuaciones

$$A\mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h, \quad (5.4.2)$$

donde  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$  con  $u_i$  una aproximación de  $u(x_i)$ ,  $A_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  y  $\mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^N$  como sigue

$$A_h = \begin{bmatrix} 2h^2 - 2x_1^2 & x_1^2 + 2hx_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_2^2 - 2hx_2 & 2h^2 - 2x_2^2 & x_2^2 + 2hx_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & x_{N-1}^2 - 2hx_{N-1} & (2h - 2x_{N-1}^2) & (x_{N-1}^2 + 2hx_{N-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & x_N^2 - 2hx_N & 2h^2 - 2x_N^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_h = \begin{bmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_N - (x_N^2 + 2hx_N)(1/4 + \ln(2)) \end{bmatrix},$$

donde  $f_i = f(x_i) = 2 \ln(x_i) + 3$ . La solución del sistema de ecuaciones lineales (5.4.2) entrega la siguiente solución numérica al problema planteado.

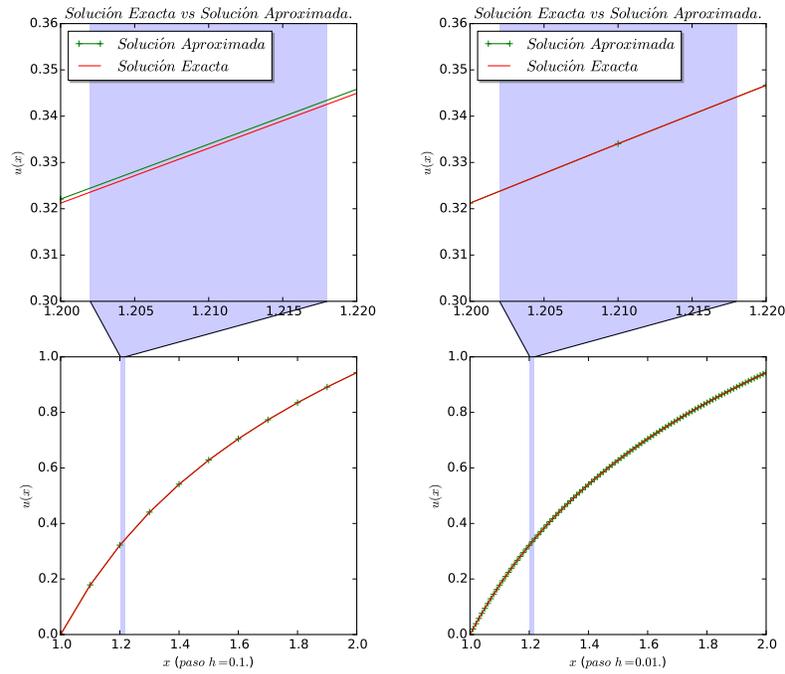


Figura 5.1: Solución numérica del problema a) con paso  $h = 0.1$  y  $h = 0.01$ .

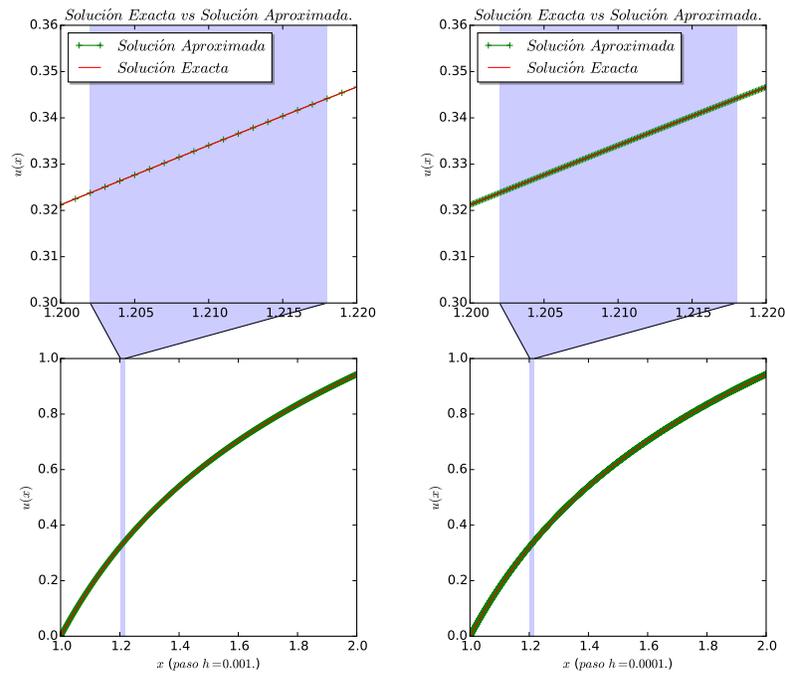


Figura 5.2: Solución numérica del problema a) con paso  $h = 0.001$  y  $h = 0.0001$ .

La información relativa a errores de aproximación, tasas de convergencia, número de condición en las diferentes normas ( $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ) no se analizaran en este momento.



Figura 5.3: Ver un código básico [Aquí](#).

### 5.4.2 Aplicación a una EDP

**Ejemplo 2:** Considere la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0, 0.5] \\ u(x, 0) &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\text{sen}(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0, u(1, t) = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}, \quad t \in [0, 0.5] \end{aligned}$$

cuya solución exacta es  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \text{sen}(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x)$ . Usaremos el método de diferencias finitas para resolver el problema planteado, para esto consideremos  $\Delta x = 0.05$  y  $\Delta t \in \{0.05, 0.005, 0.0005\}$ .

Consideremos el paso  $h = \frac{1}{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  para la variable espacial  $x$  y  $\Delta t$  para el paso en la variable tiempo  $t$ . Si denotamos  $u_i^n \approx u(ih, n\Delta t)$  la aproximación de la solución exacta en  $(ih, n\Delta t)$ , podemos aproximar las derivadas en tiempo y espacio como lo hemos hecho anteriormente, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, n\Delta t) \approx \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih, n\Delta t) \approx \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \text{o} \\ \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \end{cases}$$

De la elección de la aproximación para  $u_t(ih, n\Delta t)$  se obtiene un método explícito (primera opción) o implícito (segunda opción) según sea nuestra elección. Aquí obtendremos un método explícito.

Bajo estas elecciones una versión discreta del problema dado a través del método de diferencias finitas es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n \geq 0 \\ u_i^0 &= u_0(ih), \quad 1 \leq i \leq N \\ u_0^n &= 0, \quad u_{N+1}^n = e^{-\frac{\pi^2 n \Delta t}{4}}. \end{aligned}$$

En busca expresar el sistema resultante en forma matricial definimos  $\lambda = \frac{\Delta t}{h^2}$ , luego notemos que

i) Si  $i = 1$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \lambda(-2u_1^n + u_2^n) + \lambda u_0^n$$

ii) Si  $1 < i < N$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

iii) Si  $i = N$

$$u_N^{n+1} = u_N^n + \lambda(u_{N-1}^n - 2u_N^n) + \lambda u_{N+1}^n,$$

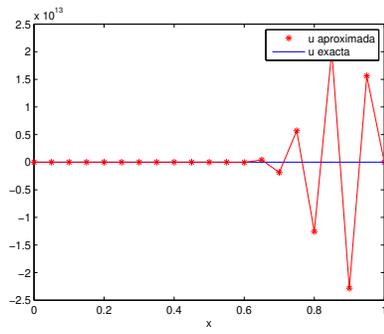
De lo anterior, vemos que el método de diferencias finitas induce el siguiente esquema numérico

$$u^{n+1} = (I + \lambda A)u^n + \lambda v^n, \quad (5.4.3)$$

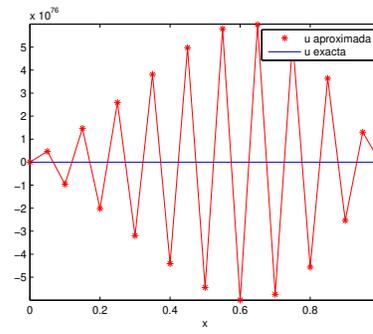
donde  $u^n = (u_i^n)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  con  $u_i^n$  una aproximación de  $u(ih, n\Delta t)$ ,  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  y  $v^n$  como sigue

$$A_h = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad v^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1}^n \end{pmatrix}_N$$

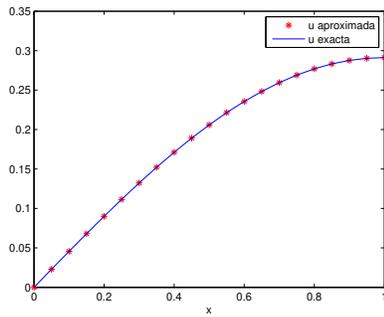
Aquí  $\lambda$  representa el número de Courant. Podemos notar la importancia de que  $\lambda$  satisfaga  $\lambda \leq 0.5$ , de no ocurrir el método numérico no es estable como podemos ver en la figura (5.4a) y (5.4b). Cuando el número de Courant satisface  $\lambda \leq 0.5$  la solución numérica es de buena calidad como se puede apreciar en la figura (5.4c) y (5.4d). Como antes, la tasa de convergencia del método no se analizará en esta instancia.



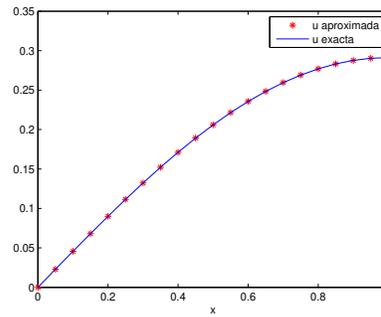
(a)  $t = 0.5s$ ,  $\lambda = 20$



(b)  $t = 0.5s$ ,  $\lambda = 2$



(c)  $t = 0.5s$ ,  $\lambda = 0.2$



(d)  $t = 0.5s$ ,  $\lambda = 0.02$

Figura 5.4: Solución exacta vs solución aproximada.



Figura 5.5: Ver un código básico [Aquí](#).

## 5.5 Volúmenes finitos

## 5.6 Elementos Finitos