

CAPÍTULO 3

Ecuaciones de Primer Orden: No todo son flores

El propósito de este capítulo es mostrar algunos ejemplos de lo que puede suceder con los problemas de Cauchy si el teorema de existencia y unicidad no se cumple o si la ecuación no es lineal. El capítulo consta de tres secciones: en la primera estudiaremos, aún en el caso lineal, situaciones en las que el teorema no se cumple; en la segunda discutiremos la propagación de singularidades; finalmente, en la última sección introduciremos las llamadas ondas de choque, que aparecen en cierto tipo de problema no lineal y que han sido muy investigadas en las últimas décadas.

3.1 Retornando al Problema de Cauchy

Anteriormente definimos las curvas características planas para la ecuación

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad (3.1.1)$$

como las curvas $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s))$ que tienen tangente en el punto $(\alpha(s), \beta(s))$ paralela al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ o, equivalentemente, que satisfacen

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Si la curva inicial $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, no es tangente a las curvas características planas, vemos que el problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \alpha(t)) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

tiene una única solución. ¿Qué sucede si la curva inicial γ es una curva característica plana? Por los ejemplos de la primera sección del Capítulo 2 esperamos que el problema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones. Es lo que de hecho sucede y lo que diferencia un caso de otro es el concepto de curva característica espacial (¡por ello el énfasis puesto hasta ahora en el adjetivo “plana!”): una curva característica para la ecuación (3.1.3) es una curva suave $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$ que tiene

tangente en el punto $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ paralela al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s)))$; equivalentemente, α , β y ξ satisfacen

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \\ \xi'(s) &= c(\alpha(s), \beta(s)).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

En el caso en que la curva inicial γ no es tangente a las curvas características planas, la superficie solución es generada por la curva $\Gamma : t \in I \rightarrow (\sigma(t), \rho(t), f(t))$ y por las curvas características en \mathbb{R}^3 que interceptan a Γ . En efecto, dada una característica de (3.1.1) que intercepta a Γ en el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0))$, podemos encontrar una parametrización $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ de dicha curva satisfaciendo (3.1.4) con

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)),\tag{3.1.5}$$

luego la característica plana que pasa por el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ es precisamente $(x(s, t_0), y(s, t_0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ y por tanto, usando la ecuación (2.2.15) del segundo capítulo,

$$\begin{aligned}u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\nu), \beta(\nu)) d\nu \\ &= f(t_0) + \int_0^s \xi'(\nu) d\nu \\ &= f(t_0) + \xi(s) - \xi(0) \\ &= \xi(s)\end{aligned}$$

por (3.1.5), lo que prueba que dicha característica está en la superficie solución; por otro lado, la superficie solución es parametrizada por

$$(s, t) \rightarrow (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$$

y, para cada t_0 fijo, definiendo

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= x(s, t_0), \\ \beta(s) &= y(s, t_0), \\ \xi(s) &= v(s, t_0),\end{aligned}$$

las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.13) del capítulo 2 muestran que α , β y ξ satisfacen (3.1.4) y (3.1.5) y por lo tanto, para cada t_0 fijo, la curva $s \rightarrow (x(s, t_0), y(s, t_0), v(s, t_0))$ es una característica que intercepta Γ en $s = 0$, lo que demuestra que la superficie solución es de hecho generada por Γ y por las curvas características.

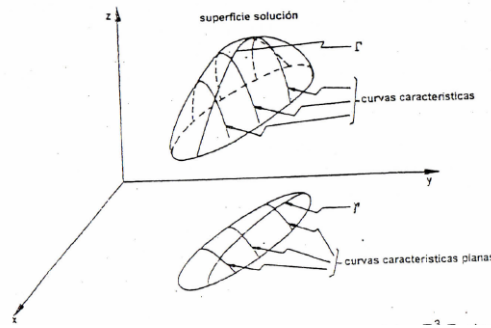


Figura 3.1: La superficie solución es generada por la curva inicial en \mathbb{R}^3 , Γ y las curvas características en \mathbb{R}^3 .

Estudiemos ahora el caso en que γ es una característica plana: probaremos que si Γ es una característica, el problema tiene infinitas soluciones y, si Γ no es característica, el problema no tiene solución.

Supongamos primero que Γ es una curva característica para la EDP (3.1.1). Sea δ una curva plana cualquiera que nunca es tangente a las características planas y que intercepta a γ en el punto $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$, sea $t \rightarrow (p(t), q(t))$ una parametrización de δ con

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \quad (3.1.6)$$

y sea r una función arbitraria de clase C^1 satisfaciendo

$$r(0) = f(s_0). \quad (3.1.7)$$

Por lo visto anteriormente, el problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(p(t), q(t)) &= r(t) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

tiene una única solución u en una vecindad de δ ; además, la superficie solución contiene a la curva $\Delta : t \rightarrow (p(t), q(t), r(t))$ y contiene todas las características de la EDP que interceptan Δ ; en particular, la superficie solución contiene a Γ pues

$$(p(0), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in \Delta \cap \Gamma$$

por (3.1.6) y (3.1.7). Por consiguiente u es solución de (3.1.3). Como existen infinitas elecciones posibles para la curva δ y la función r , el problema tiene infinitas soluciones.

Supongamos ahora que γ es una característica plana pero que Γ no es una característica para (3.1.1). Suponga, por el absurdo, que el problema (3.1.3) tiene solución en ese caso: si u es solución, para todo $t \in I$, derivando la condición inicial obtenemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t); \quad (3.1.9)$$

por otro lado, la EDP (3.1.1) en el punto $(\sigma(t), \rho(t))$ queda

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)); \quad (3.1.10)$$

comparando (3.1.9) y (3.1.10) y considerando que los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son paralelos (pues γ es característica plana), obtenemos que los vectores en \mathbb{R}^3

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \quad \text{y} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$$

también son paralelos, es decir, Γ es una característica, lo que contradice la hipótesis. En consecuencia el problema (3.1.3) no tiene solución en este caso.

Ejemplo 3.1.1 Considere el problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

En este caso las características planas son las rectas horizontales, luego el problema tiene solución si y sólo si la curva $\Gamma : t \rightarrow (t, 0, f(t))$ es una característica, esto es, los vectores $(1, 0, 2t)$ y $(1, 0, f'(t))$ son paralelos, lo que es equivalente a

$$f'(t) = 2t \Leftrightarrow f(t) = t^2 + c, \text{ } c \text{ constante.}$$

Luego el problema sólo tiene solución si $f(x) = x^2 + c$ para alguna constante c : en ese caso, tomando el eje de las y como la curva δ y $r(y)$ de clase C^1 con

$$r(0) = f(0) = c, \tag{3.1.12}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \\ u(0, y) &= r(y) \end{aligned}$$

cuya solución es

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x 2tdt = r(y) + x^2.$$

Por tanto, en el caso que $f(x) = x^2 + c$, el problema tiene como solución todas las funciones de la forma

$$u(x, y) = r(y) + x^2$$

donde r es de clase C^1 y satisface (3.1.12).

Volviendo al problema (3.1.3), el caso en el que la curva inicial γ es una característica plana es un caso extremo. ¿Que sucede si la curva γ es tangente a una característica plana en un punto determinado?

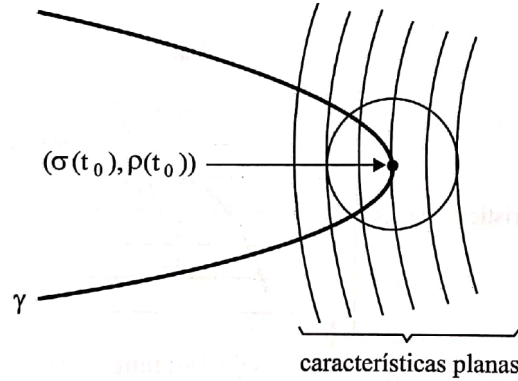


Figura 3.2: En cualquier vecindad de $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ pasa una característica plana que intercepta a γ más de una vez y otra que no intercepta a γ

Puede ocurrir, como en el problema (2.1.6) del capítulo 2, que, para toda vecindad del punto donde γ es tangente a una característica plana, exista siempre una característica plana que intercepte a γ más de una vez y otra que no intercepte a γ pasando por esa vecindad (vea la figura 3.1): la existencia de una característica plana interceptando a γ más de una vez obliga a que el dato inicial f satisfaga alguna condición para que exista solución, pues el valor de la solución en uno de los puntos de la intersección determina el valor de la solución a lo largo de toda la curva característica plana; la existencia de una característica plana que no intercepta a γ hace que la solución, si existe, no sea única, pues el valor de la solución a lo largo de tales características no está determinado. Puede suceder también que, aún en presencia de esa tangencia, por cada punto de γ pase exactamente una característica plana que intercepta a γ sólo en ese punto: ello de hecho nos permite integrar a lo largo de las características planas, aunque podamos perder diferenciabilidad. Veamos primero un ejemplo en el que todo funciona.

Ejemplo 3.1.2 *Resolvamos el problema*

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x^2 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

En este caso las características planas son las rectas $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, y, aunque la curva inicial $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow (t, t^3)$ sea tangente a la recta $y = 0$ en $t = 0$, cada característica plana intercepta a γ en sólo un punto. Entonces podemos integrar a lo largo de las curvas características planas para obtener la solución:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\sqrt[3]{y}}^x t^2 dt + f(x) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(x). \end{aligned}$$

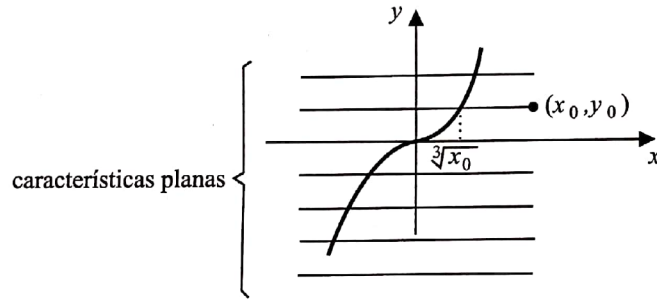


Figura 3.3: Aunque la curva inicial γ sea tangente a la característica plana $y = 0$, γ intercepta a cada característica plana en un único punto.

Cuando desarrollamos abstractamente el método de integración a lo largo de las características planas para resolver el problema (3.1.3) suponiendo que la curva inicial γ no es tangente a las características planas, usamos ese hecho para probar que el jacobiano de la transformación $(s, t) \rightarrow (x(s, t), y(s, t))$ es diferente de cero en una vecindad de la curva γ . En el caso en que permitimos la tangencia, el jacobiano se anula en el punto de tangencia. Puede ocurrir entonces que, aún en el caso en que cada característica plana intercepta a γ en exactamente un punto, el cambio de variable $(s, t) \rightarrow (x, y)$ ya no sea diferenciable y por tanto la solución encontrada integrando a lo largo de las características no sea de clase C^1 . Una pequeña modificación en el problema (3.1.13) ejemplifica esta situación: basta considerar

$$\begin{aligned} u_x &= 1 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

entonces las características planas son las mismas y la solución es

$$u(x, y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^x dt + f(x) = x - \sqrt[3]{y} + f(x),$$

que no es diferenciable en $y = 0$.

Es interesante observar que, antes de determinar la existencia o no de solución para el problema (3.1.3), es posible determinar formalmente las derivadas de la solución u (¡si existen!) en cualquier punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ de la curva inicial γ en la que ella no es paralela a las características planas (no sólo las derivadas de primer orden, sino las de cualquier orden) suponiendo evidentemente que las funciones a, b, c, σ, ρ y f son infinitamente diferenciables. Para calcular las derivadas de primer orden, reenuncie la EDP en el punto $(\sigma(t), \rho(t))$ y derive la condición inicial en t de modo de obtener

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= c(\sigma(t), \rho(t)), \\ \sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= f'(t) \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

como

$$\det \begin{pmatrix} a(\sigma(t_0), \rho(t_0)) & b(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \\ \sigma'(t_0) & \rho'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

por continuidad el determinante es diferente de cero en una vecindad de $t = t_0$ y podemos resolver algebraicamente el sistema (3.1.15) para $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_y(\sigma(t), \rho(t))$. Para obtener las derivadas de

mayor orden, basta derivar la EDP, $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_y(\sigma(t), \rho(t))$. Por ejemplo, para calcular u_{xx} , derive la EDP respecto de x :

$$au_{xx} + bu_{yx} = c_x - a_x u_x - b_x u_y,$$

y derive $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ respecto de t para obtener

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= F(t) \\ \sigma'(t)u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= G(t) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

donde

$$F(t) = (c_x - a_x u_x - b_x u_y)(\sigma(t), \rho(t))$$

y

$$G(t) = \frac{d}{dt} \{u_x(\sigma(t), \rho(t))\}$$

son funciones conocidas; el sistema (3.1.16) puede resolverse algebraicamente para $u_{xx}(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_{xy}(\sigma(t), \rho(t))$ para t en una vecindad de $t = t_0$. Podemos entonces escribir formalmente la solución desarrollando en serie de Taylor en torno del punto $(x_0, y_0) = (\sigma(t_0), \rho(t_0))$,

$$u(x, y) \approx \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (3.1.17)$$

Es natural preguntar cuándo la serie en (3.1.17) converge y, en caso de que ella converja, si la suma de la serie es solución del problema (3.1.3). De hecho, la respuesta a esas dos preguntas es afirmativa si suponemos, además de las condiciones ya enunciadas, que las funciones a, b, c, σ, ρ, f son analíticas, es decir, a, b, c tienen una expansión en serie de Taylor en torno del punto (x_0, y_0) y σ, ρ, f admiten una expansión en serie de Taylor en torno del punto t_0 ; en este caso la serie en (3.1.17) converge en una vecindad V del punto (x_0, y_0) , es solución de la EDP (3.1.3) en V y satisface la condición inicial en (3.1.3) para t en una vecindad de t_0 . Esta afirmación es una de las formas más simples del teorema de Cauchy-Kowalewski y el lector interesado debe consultar [ZT].

3.2 Propagación de Singularidades

Volvamos al problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde $t \in I$ es un intervalo abierto, la curva plana $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ es una curva suave, las funciones a, b, c son de clase C^1 en algún subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo a la curva γ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada.

En el segundo capítulo vimos que, si $f \in C^1(I)$ y si la curva γ no es tangente a las características planas, entonces el problema (3.2.1) tiene una única solución clásica en una vecindad de la curva γ . La

solución en el punto (x_0, y_0) se obtiene integrando la ecuación a lo largo de la curva característica que pasa por $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ de $s = 0$, que corresponde al punto

$$(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (x(0, t_0), y(0, t_0)),$$

hasta $s = s_0$. Por tanto la solución en el punto (x_0, y_0) sólo depende del dato inicial en el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \in \gamma$; por ello, el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ es llamado el **dominio de dependencia** de (x_0, y_0) . Por razones análogas, la **región de influencia** de una parte $\tilde{\gamma}$ de la curva γ es el conjunto de puntos por donde pasan las características planas que interceptan $\tilde{\gamma}$.

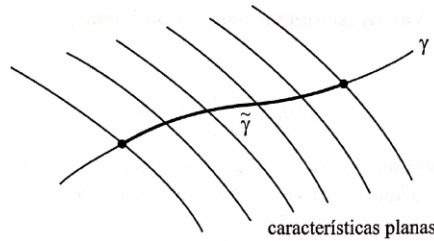


Figura 3.4: La región de influencia de $\tilde{\gamma}$ es determinada por las características planas que interceptan $\tilde{\gamma}$.

Si retiramos la hipótesis $f \in C^1(I)$ manteniendo la hipótesis sobre γ , podemos proceder de la misma manera, sólo que no obtendremos más una solución clásica. Si f (o f') tiene una discontinuidad en t_0 , entonces u (o alguna de sus derivadas) tendrá discontinuidades a lo largo de la característica que pasa por $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$. Por lo tanto las singularidades son propagadas a lo largo de las características planas.

Ejemplo 3.2.1 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy, \\ u(x, 0) &= f(x), x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como vimos en el ejemplo 2.2.16 del capítulo 2, las características planas son círculos centrados en el origen y la solución del problema (3.2.2) es dada por

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + 2y^2 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Note que $u \in C(R^2)$ pero u no es diferenciable en el círculo $x^2 + y^2 = 1$; u satisface la ecuación diferencial en el interior y en el exterior de este círculo, que es precisamente la característica plana que pasa por $(1, 0)$.

Ejemplo 3.2.2 Vamos a considerar ahora el problema

$$\begin{aligned} u_x + bu_y &= 0, \\ u(0, y) &= \frac{1}{y}, y \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

donde b es constante. En este caso la curva inicial es el eje de las y pero la función es discontinua en el origen. Como las características son las rectas

$$y = bx + c$$

donde c es constante, la solución de (3.2.3) no estará definida a lo largo de la recta $y = bx$: de hecho,

$$u(x, y) = \frac{1}{y - bx}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y \neq bx.$$

es solución de (3.2.3), en el sentido que u satisface la EDP fuera de la recta $y = bx$.

La situación en el caso no lineal, tanto en lo que se refiere a la propagación de singularidades como al comportamiento de la solución, es bastante diferente. Para tener una idea de lo que puede acontecer, vamos a considerar ecuaciones no lineales de la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.4)$$

donde f es una función de clase C^2 dada. Observe que la ecuación (3.2.4) puede ser escrita en la forma

$$u_t + b(u)u_x = 0, \quad (3.2.5)$$

$$b(u) = f'(u). \quad (3.2.6)$$

Ecuaciones del tipo (3.2.4) aparecen en el estudio de fenómenos ondulatorios (sin efectos disipadores) no lineales, como por ejemplo en dinámica de los gases. Lo que corresponde a las características planas en ese caso son las curvas en el plano xt satisfaciendo

$$\frac{dx}{dt} = b(u) \quad (3.2.7)$$

donde $u = u(x(t), t)$. A lo largo de tales curvas u es constante pues

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + b(u)u_x = 0,$$

luego las curvas definidas por (3.2.7) son de hecho rectas. Es claro que esas rectas no pueden ser determinadas a priori, una vez que la ecuación (3.2.7) involucra el valor (desconocido) de u a lo largo de la curva. Podemos sin embargo usar esas curvas para hallar la solución de (3.2.4) satisfaciendo una determinada condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2.8)$$

La idea aquí, como en el caso lineal, es construir la solución utilizando las “características planas” que interceptan la curva inicial plana $t = 0$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, u es constante e igual a $u_0(x_0)$ a lo largo de la recta que pasa por el punto $(x_0, 0)$ y satisface (3.2.7), esto es

$$u = u_0(x_0), \quad (3.2.9)$$

a lo largo de la recta

$$x = b(u_0(x_0))t + x_0. \quad (3.2.10)$$

Llamaremos características planas para el problema (3.2.5), (3.2.8) a las rectas (3.2.10). Basados en el caso lineal, esperamos que las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinen la solución del problema. Eso de hecho ocurre en una banda $t \in (0, T)$ pero, al contrario del caso lineal, las características planas se pueden interceptar.

Ejemplo 3.2.3 Considere el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La ecuación en (3.2.11) es la ecuación de Burger sin viscosidad y es de la forma (3.2.4) con $f(u) = u^2/2$. En este caso las rectas (3.2.10) se interceptan para $t \geq 1$, de modo que la solución dada por (3.2.9), (3.2.10) sólo es válida para $t < 1$. Las características planas para el problema (3.2.11) son dadas por

$$x = \begin{cases} t + x_0 & \text{si } x_0 < 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & \text{si } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ x_0 & \text{si } x_0 > 1. \end{cases}$$

Si $x < t < 1$, entonces $x = t + x_0$ para algún $x_0 < 0$ y por tanto $u = u_0(x_0) = 1$; si $t < x < 1$, $x = (1 - x_0)t + x_0$ para algún $x_0 \in [0, 1]$, luego

$$u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}$$

finalmente, si $t < 1 < x$, entonces $u = u_0(x) = 0$. Por tanto la solución del problema (3.2.11), definida para $0 \leq t < 1$, es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t < 1. \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t \leq x < 1. \\ 0 & \text{si } t < 1 \leq x. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Observe que la función u definida por (3.2.12) no es una solución clásica puesto que $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0, 1))$: las derivadas parciales de u no están definidas a lo largo de los segmentos de recta $\{(t, t) : 0 \leq t < 1\}$ y $\{(1, t) : 0 \leq t < 1\}$. Esto era de esperarse pues ellas son las características planas que pasan por $(0, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente, y la condición inicial no es diferenciable en $x = 0$ y $x = 1$. Fuera de estos segmentos de recta, es claro que u satisface la EDP en (3.2.11); note también que $u \in C(\mathbb{R} \times [0, 1])$ y satisface la condición inicial en (3.2.11).

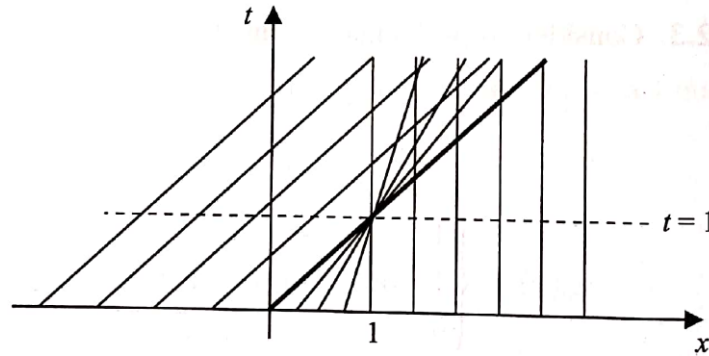


Figura 3.5: Características planas para el problema (3.2.11).

Respecto a la propagación de singularidades, la situación en el caso no lineal es también muy diferente.

Ejemplo 3.2.4 Consideremos nuevamente la ecuación de Burger pero con una condición inicial diferente,

$$u_t + uu_x = 0, \quad (3.2.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2.14)$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0. \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{si } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$ y es solución del problema (3.2.13), decir, satisface la EDP para $t > 0$ fuera de las características que pasan por el origen y satisface la condición inicial.

Este ejemplo muestra que podemos tener una solución continua para $t > 0$ aunque la condición inicial ($t = 0$) sea discontinua: por tanto la discontinuidad de la condición inicial no es “cargada” por las características planas. En el ejemplo precedente, sólo las derivadas son discontinuas a lo largo de las características planas que pasan por el origen. Ese es, evidentemente, un fenómeno puramente no lineal.

3.3 Ondas de choque

Volvamos al ejemplo 3.2.3: note que no es posible hallar una solución global, es decir, definida para todo $t > 0$, que sea continua en el punto $(1, 1)$, una vez que $u = 1$ en la región $x < t < 1$ y $u = 0$ en la región $t < 1 \leq x$; además, aún admitiendo soluciones discontinuas (por ejemplo, funciones discontinuas a lo largo de una curva suave y que satisfacen la EDP fuera de esa curva), no podríamos determinar la solución en la región $1 < x < t$ una vez que cada punto en dicha región esta en exactamente tres características planas (vea la figura 3.2).

Aún con relación al problema (3.2.11), note que las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinan en ese caso una superficie (que no es el gráfico de una función de x y t) en el espacio xtu , parametrizada por x_0 y t ; la figura (3.3) nos muestra la proyección de las curvas $s \rightarrow (x(s, t_0), t_0, u(s, t_0))$ en el plano xu para distintos valores de t_0 . Observe como la curva “se quiebra” en $t = 1$.

El ejemplo 3.2.3 es típico de lo que sucede cuando las características planas se interceptan. Note que, si $x_1 < x_2$, las características planas que pasan por $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ son dadas, respectivamente, por (vea la ecuación (3.2.10))

$$l_1 : x = b(u_0(x_1))t + x_1,$$

$$l_2 : x = b(u_0(x_2))t + x_2,$$

luego l_1 y l_2 tienen un punto P en común si y solamente si

$$b(u_0(x_1)) > b(u_0(x_2)).$$

En ese caso, si $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$, una solución global es necesariamente discontinua en $P = (x_0, t_0)$ puesto que, cuando $t \rightarrow t_0^-$ a lo largo de l_1 , $u \rightarrow u_0(x_1)$ en tanto que $u \rightarrow u_0(x_2)$ cuando $t \rightarrow t_0^-$ a lo largo de l_2 ; decimos

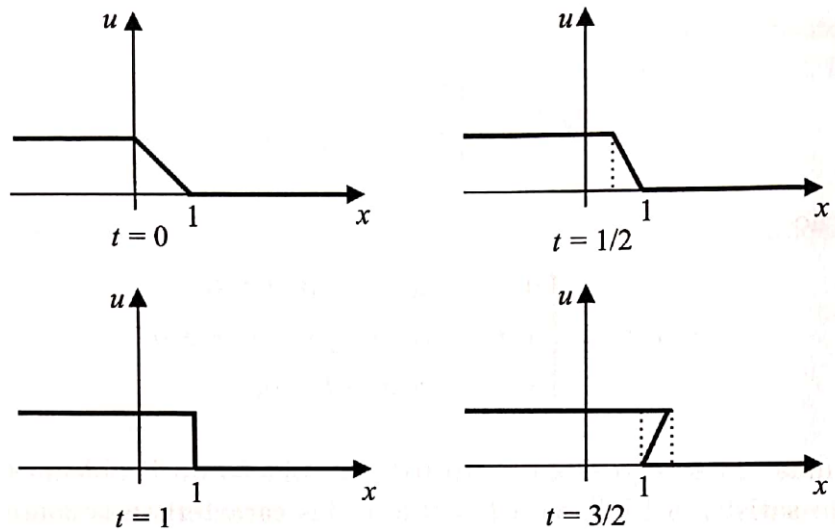


Figura 3.6: Proyección de las curvas $s \rightarrow (x(s, t), t, u(s, t))$ en el plano xu para diferentes valores de t .

entonces que una *onda de choque* es formada en $t = t_0$. Soluciones discontinuas tienen sentido desde el punto de vista físico: experiencias con fluidos compresibles muestran la aparición de discontinuidades

en la solución. Buscaremos entonces funciones u que sean discontinuas a lo largo de una curva $x = g(t), t \geq t_0$, y que satisfagan la EDP fuera de esa curva.

Observe que, si la función $b(u_0(x))$ es una función monótona no decreciente de x , las características nunca se encuentran pues, en ese caso,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b(u_0(x_1)) \leq b(u_0(x_2))$$

Del punto de vista analítico, esto significa que $b(u_0(x))$ tiene derivada siempre mayor o igual que cero y por tanto las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinan la solución para todo $t > 0$: de hecho, la transformación

$$\begin{aligned} x &= b(u_0(x_0))s + x_0 \\ t &= x \end{aligned}$$

define un cambio de variable, una vez que su jacobiano nunca se anula.

Volviendo al problema (3.2.11), debemos debilitar el concepto de solución, aceptando soluciones discontinuas, y descubrir, analizando el problema físico, como definir la solución en la región $1 < x < t$. De hecho, ecuaciones del tipo (3.2.4) son derivadas de leyes de conservación integrales de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_G u dx = - \int_{\partial G} f \cdot n ds, \quad (3.3.1)$$

donde G es una región del espacio, u mide la densidad de la entidad física en discusión, f describe el flujo y n es la normal exterior al borde ∂G de G . La ecuación (3.3.1) expresa que la tasa de variación de cantidad total de entidad física contenida en una región G es igual al flujo que atraviesa el borde de G . En el caso unidimensional, G es un intervalo y la ecuación (3.3.1) queda

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(a, t, u(a, t)) - f(b, t, u(b, t)). \quad (3.3.2)$$

Observe que, derivando bajo el signo de integral, dividiendo entre $(b - a)$ y haciendo tender el intervalo $[a, b]$ a un punto, obtenemos la ecuación

$$u_t + f_x = 0$$

que coincide con la ecuación (3.2.4) si $f = f(u)$. Por tanto la solución que tiene sentido del punto de vista físico es la que satisface (3.3.2).

Volviendo a la ecuación (3.2.4), buscamos una solución $u = u(x, t)$ satisfaciendo (3.2.8) y que no está definida a lo largo de una curva suave $x = g(t), t \geq t_0$, donde $t_0 > 0$ es el menor valor de t para el cual hay intercepción de características. Supongamos que u da un “salto” a lo largo de $x = g(t), t > 0$, que $t_0 \leq t \leq T$ y tomamos $a < b$ de modo que la porción de curva $x = g(t)$ para $t_0 \leq t \leq T$ esté contenida en la banda $a < x < b$ del plano xt (vea la figura 3.3). Con esta notación, definimos

$$I(t) = \int_a^b u(x, t) dx \quad (3.3.3)$$

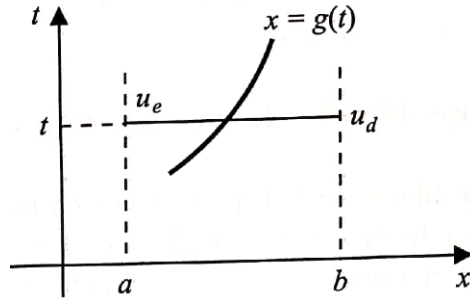


Figura 3.7: Los extremos del intervalo, a y b se escogen de modo que la curva $t \in [t_0, T] \rightarrow (g(t), t)$ esté contenida en $(a, b) \times [t_0, T]$.

Entonces, de (3.3.2),

$$\frac{dI}{dt} = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (3.3.4)$$

Por otro lado, si denotamos por u_l y u_d , respectivamente, las soluciones a izquierda y a derecha de la curva $x = g(t)$, entonces la ecuación (3.3.3) puede reescribirse así

$$I(t) = \int_a^{g(t)} u_l(x, t) dx + \int_{g(t)}^b u_d(x, t) dx.$$

Por hipótesis, u_l y u_d tienen límites laterales cuando $x \rightarrow g(t)^-$ y $x \rightarrow g(t)^+$ respectivamente, luego, derivando directamente,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= g'(t)u_l(g(t), t) + \int_a^{g(t)} \partial_t u_l(x, t) dx - g'(t)u_d(g(t), t) + \int_{g(t)}^b \partial_t u_d(x, t) dx \\ &= g'(t) \{u_l(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - \int_a^{g(t)} \partial_x (f(u_l(x, t))) dx - \int_{g(t)}^b \partial_x (f(u_d(x, t))) dx \\ &= g'(t) \{u_l(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - f(u_l(g(t), t)) + f(u_l(a, t)) \\ &\quad - f(u_d(b, t)) + f(u_d(g(t), t)); \end{aligned}$$

comparando con (3.3.4), obtenemos

$$g'(t) (u_d(g(t), t) - u_l(g(t), t)) = f(u_d(g(t), t)) - f(u_l(g(t), t))$$

o sea

$$s[u] = [f] \quad (3.3.5)$$

donde $s = g'(t)$,

$$[u] = u_d(g(t), t) - u_l(g(t), t)$$

es el “salto” que da u al cruzar la curva $x = g(t)$ y

$$[f] = f(u_d(g(t), t)) - f(u_l(g(t), t))$$

es el “salto” que da $f(u)$ al cruzar la curva $x = g(t)$. La condición (3.3.5) es llamada la *condición* de salto.

Ejemplo 3.3.1 Apliquemos esas ideas para encontrar una solución global para el problema (3.2.11): como $u = 1$ para $x < t < 1$ y $u = 0$ para $x > \max\{1, t\}$, es natural buscar una solución con $u_t = 1$ y $u_x = 0$ para $t > 1$, luego $[u] = -1, [f] = -1/2, s = 1/2$ y

$$g(t) = t/2 + c.$$

Por otro lado, la discontinuidad debe comenzar en el punto $(1, 1)$, luego la curva suave $x = g(t), t \geq 1$, debe ser la semirrecta $2x = t + 1, t \geq 1$ y la solución global deseada es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t < 1 \text{ ó } x < \frac{1+t}{2}, t \geq 1. \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } t < 1 \leq x \text{ ó } x > \frac{1+t}{2} \geq 1. \end{cases}$$

La figura 3.3.1 muestra las discontinuidades de u : u es discontinua a lo largo de la semirrecta $2x = t + 1, t \geq 1$ y las derivadas de primer orden de u son discontinuas (además, es claro, de la semirrecta anterior) en los segmentos de recta $x = t, 0 \leq t \leq 1$ y $x = 1, 0 \leq t \leq 1$.

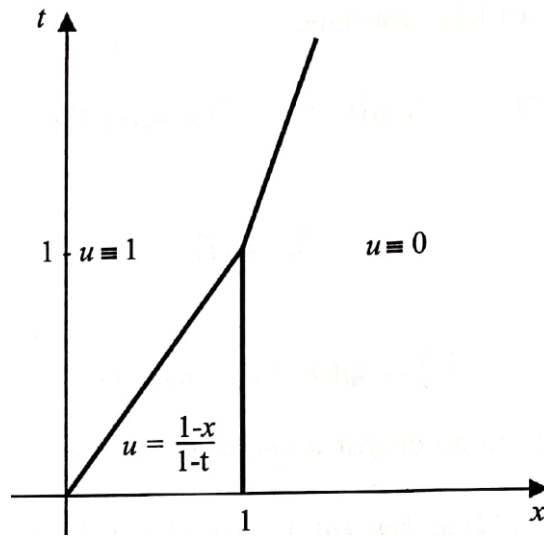


Figura 3.8: Solución global del problema (3.2.11).

Extendiendo el concepto de solución tornamos posible el resolver problemas de valor inicial del tipo (3.2.4), (3.2.8) que no tienen soluciones globales clásicas. Al mismo tiempo, existe el peligro de que hayamos aumentado en demasía la clase de posibles soluciones, perdiendo la unicidad. De hecho, el ejemplo 3.2.4 muestra que ello puede suceder: las características planas no se interceptan y existe solución clásica para $t > 0$ pero que no está determinada en la región $0 \leq x \leq t$. (vea la figura 3.3). Procediendo como en el ejemplo 3.3.1, vemos que la función

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < t/2 \\ 1 & \text{si } x > t/2 \end{cases}$$

satisface la condición de salto (3.3.5) y es solución de (3.2.13) en el sentido de que satisface la EDP para $t > 0$ fuera de la recta $x = t/2$ y, evidentemente, satisface la condición inicial. Por otro lado, la

función

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{si } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$ (luego, en particular, satisface la condición de salto (3.3.5) con $[u] = [j] = 0$) y satisface la EDP para $t > 0$ fuera de las características que pasan por el origen. Sólo una de estas funciones tiene significado físico, el problema es saber cual de ellas es.

La solución u_1 en el ejemplo precedente puede descartarse introduciendo el siguiente criterio:

Hipótesis 3.2 Dado (x, t) , con $t > t_0$, fuera de la curva de discontinuidad, existe una característica plana que pasa por (x, t) la cual es interceptada por la curva de discontinuidad en un instante $t_1 > t$.

De la figura 3.3 es evidente que no existe ninguna curva en la región $0 < x < t$ que satisfaga la hipótesis 3.2, luego la solución global que buscamos para el problema (3.2.13) tiene que ser continua.

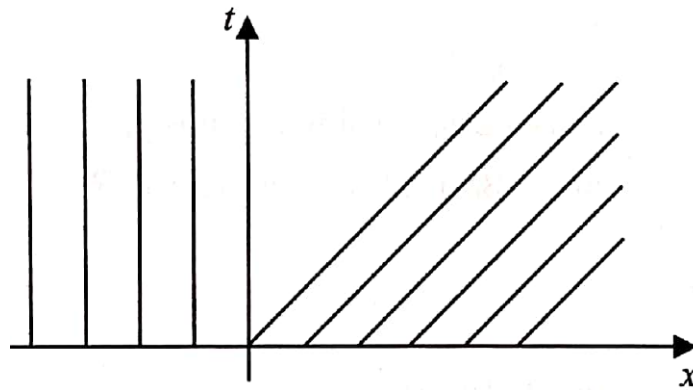


Figura 3.9: Características planas para el problema (3.2.13).

El significado de la hipótesis tal vez quede más claro analizando el ejemplo (3.3.1): comparando las figuras (3.2) y (3.3.1), vemos que existen tres características planas que pasan por un punto (x_1, t_1) en la región $1 < x < t$ pero sólo una de ellas intercepta a la curva de discontinuidad $2x = t + 1, t \geq 1$, en un instante $t > t_1$ (si $2x_1 \neq t_1 + 1$, es evidente). Esto significa que, con la hipótesis u_l y u_d están determinadas por la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$: Observe que si

$$b(u_l(x_1, t)) > g'(t) > b(u_d(x_2, t)) \quad (3.3.6)$$

siempre que $x_1 < g(t) < x_2, t > t_0$, entonces se satisface la hipótesis 3.2.

Del punto de vista físico, la hipótesis 3.2 puede justificarse mediante la teoría de la entropía. Para mayores detalles el lector debe consultar el parágrafo B del capítulo 15 de [Sm]; puede ver también el excelente artículo de Lax [La] y el libro [W].