CAPÍTULO 2

Ecuaciones de Primer Orden: Caso Lineal

Como su nombre indica, en este capitulo estudiaremos ecuaciones lineales de primer orden. En la primera sección veremos algunos ejemplos simples de problemas de Cauchy que nos darán una idea de lo que puede suceder. La segunda sección es dedicada al estudio de problemas de Cauchy para ecuaciones lineales sin dependencia explícita en la variable dependiente. En la tercera y última sección discutiremos la solución general de ecuaciones lineales.

2.1 Algunos Ejemplos

En esta sección estudiaremos algunos ejemplos simples de problemas de Cauchy para ecuaciones lineales de primer orden con dos variables independientes.

Consideremos primero el ejemplo (1.3.1.1) del primer capitulo:

$$\begin{aligned} &u_y = 0 \quad \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ &u(x, p(x)) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son funciones dadas. Como vimos anteriormente este es un problema de Cauchy: la función u que deseamos encontrar es conocida a lo largo de la curva inicial $y = p(x)$.

La EDP en (2.1.1) es muy simple y puede integrarse directamente: como la derivada parcial de u respecto de y es idénticamente nula, vemos que u es constante como función de y, o sea que, u sólo depende de x. En otras palabras, la solución general de la EDP en (2.1.1) es

$$u(x, y) = g(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1.2}$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria (estamos buscando soluciones clásicas, esto es, $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$). Como (2.1.2) es válida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considerando $y = p(x)$ obtenemos

$$g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir, la solución del problema (2.1.1) es dada por

$$u(x, y) = f(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.3}$$

Probamos entonces que, si u es una solución clásica de (2.1.1), u es dada por (2.1.3); recíprocamente, si u es dada por (2.1.3), entonces u es solución de (2.1.1). Por tanto el problema (2.1.1) tiene una única solución clásica.

Observe que, como estamos buscando soluciones $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, necesitamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Si quisiéramos soluciones más generales podríamos resolver el problema para funciones f más generales. Por ejemplo, si buscamos soluciones $u \in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que existe la derivada parcial un todos los puntos, f puede ser cualquier función continua. Además, observe que la curva inicial no requiere ser diferenciable de hecho ¡no es necesario que la función p sea continua!

La dependencia continua en los datos del problema (2.1.1) es evidente una vez que la solución $u(x,y)$ es igual a la condición inicial $f(x)$. Tenemos por consiguiente dependencia continua en los datos y el problema (2.1.1) es bien puesto.

Consideremos ahora el ejemplo (1.3.1.2) del capitulo 1:

$$\begin{aligned} &u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right), \\ &u(0,y) = f(y), y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada. La única diferencia entre (2.1.1) y (2.1.4) es la curva inicial: en (2.1.1) ella es el gráfico de una función de x, mientras que en (2.1.4) es el eje de las y. Sin embargo, el problema (2.1.1) es bien puesto y (2.1.4) no lo es. De hecho, derivando la condición inicial en (2.1.4) respecto de y, obtenemos

$$\begin{aligned} &u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ &u_y(0,y) = f'(y), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y por tanto

$$f'(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Luego, para que exista solución, es preciso que la función f sea constante. Si f es constante, $f \equiv k$, como la solución general de la EDP es dada por (2.1.2), la solución de (2.1.4) es

$$u(x,y) = g(x), (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.1.5}$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R})$ es cualquier función que satisface $g(0) = k$. En conclusión: el problema (2.1.4) no tiene solución si f no es constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

La situación es totalmente análoga si la curva inicial es una recta vertical: dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema

$$\begin{aligned} &u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ &u\left(x_0, y\right) = f(y), y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

no tiene solución si f no es constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

Y para curvas más generales, ¿Qué sucede? Para responder la pregunta vamos a dar un ejemplo más, tomando como curva inicial la parábola $x = 1 - y^2$, esto es, consideramos el problema

$$\begin{aligned} &u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ &u\left(1 - y^2, y\right) = f(y). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada.

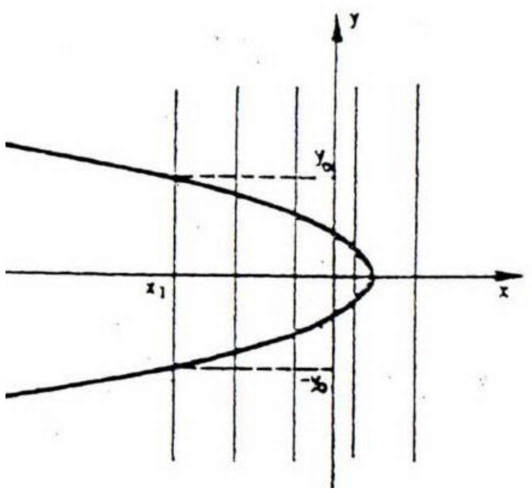

Figura 2.1: La solución es constante a lo largo de rectas verticales.

Como vimos anteriormente (ecuación (2.1.5)), la solución general de la EDP en (2.1.6) es una función sólo de x; luego, si u es solución de (2.1.6), dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $u(x_0, y) = g(x_0)$ es constante, es decir, $u(x, y)$ es constante a lo largo de rectas verticales. Dado $x_0 < 1$, la recta vertical $x = x_0$ intersecta la curva inicial en dos puntos (x_0, y_0) y $(x_0, -y_0)$; pero entonces, si u es solución,

$$f(y_0) = u(x_0, -y_0) = f(-y_0).$$

Luego, para que el problema (2.1.6) tenga solución, es necesario que

$$f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R},$$

es decir, es preciso que f sea una función par. Entonces, si f no es par, el problema no tiene solución. Si f es par, es de esperar que el problema tenga infinitas soluciones pues u no está determinada para $x > 1$: dado $x_0 > 1$, la recta vertical $x = x_0$ no intersecta la curva inicial. En verdad, como estamos buscando soluciones de clase C^1, aún cuando fuera par es necesario imponer una condición adicional: observe que la solución, por lo que vimos antes, debe ser dada por

$$u(x, y) = f(\sqrt{1-x}) \text{ si } x \leq 1,$$

como queremos $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, se requiere que exista la derivada

$$\left.\frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x}))\right|_{x=1}$$

y, en ese caso, las soluciones del problema (2.1.6) son dadas por

$$u(x, y) = \begin{cases} f(\sqrt{1-x}) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $g \in C^1([1, +\infty))$ satisface

$$g(1) = f(0), \quad g'(1) = \frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x}))\Big|_{x=1}.$$

El estudio de este ejemplo deja claro que el problema de Cauchy para la ecuación

$$u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \tag{2.1.7}$$

tiene solución única para cualquier condición inicial $f \in C^1(\mathbb{R})$ si le curva inicial es tal que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, la recta $x = x_0$ intersecta a la curva en exactamente un punto; en otras palabras, si la curva inicial es el gráfico de una función $y = p(x)$. Entonces estamos otra vez en el problema (2.1.1).

Aquí el aspecto fundamental es que todas las soluciones de la EDP (2.1.7) son constantes en rectas verticales y las curvas iniciales "buenas"son las que no tienen tangentes verticales. Veremos posteriormente que las rectas verticales son curvas caracteristicas planas para la EDP (2.1.7): En el caso de EDPs de primer orden las curvas características son curvas a lo largo de las cuales la EDP es una derivada total: integrando entonces a lo largo de dichas curvas resolvemos la ecuación. Exactamente fue eso lo que hicimos para hallar la solución general de (2.1.7): integramos respecto de y, o sea, a lo largo de las rectas $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

La ecuación (2.1.7) es una EDP lineal homogénea pero las ecuaciones no homogéneas pueden resolverse de la misma manera. Para nuestro ejemplo, la ecuación no homogénea correspondiente es

$$u_y = h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1.8}$$

donde $h \in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ es dada. Observe que las características planas son las mismas: a lo largo de la recta $x = x_0$ la ecuación queda

$$\frac{d}{dy} u\left(x_0, y\right) = h\left(x_0, y\right).$$

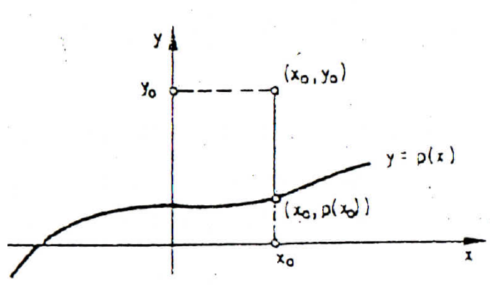

Figura 2.2: La solución se obtiene integrando a lo largo de las caracteristicas planas (en el caso, las rectas verticales).

Vamos a resolver el problema correspondiente al (2.1.1), esto es,

$$\begin{aligned} u_y &= h(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2. \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

donde $h \in C\left(\mathbb{R}^2\right), p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son dadas. Para hallar la solución en el punto (x_0, y_0) basta integrar a lo largo del segmento de recta determinado por $(x_0, p(x_0))$ y (x_0, y_0) (vea la figura 2.2): de hecho, si u es solución de (2.1.9), entonces

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \int_{p(x_0)}^{y_0} u_y(x_0, t)\, dt + u(x_0, p(x_0)) \\ &= f(x_0) + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t)\, dt \end{aligned}$$

o sea

$$u(x,y) = f(x) + \int_{p(x)}^{y} h(x,t) dt \tag{2.1.10}$$

recíprocamente, si u es dada por (2.1.10), entonces u es solución de (2.1.9). En consecuencia el problema (2.1.9) tiene una única solución dada por (2.1.10).

En la siguiente sección, usaremos estas ideas para resolver problemas de Cauchy para ecuaciones lineales de primer orden con dos variables independientes sin dependencia explícita en la variable dependiente.

2.2 El Problema de Cauchy

En esta sección estudiaremos el problema de Cauchy para ecuaciones de la forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y). \tag{2.2.1}$$

Observe que en la ecuación (2.2.1) la función incógnita u aparece sólo en la parte principal de la ecuación, lo que simplifica un poco la resolución. En la tercera sección de este capítulo estudiaremos ecuaciones lineales generales.

Como vimos en la sección anterior, existe una relación entre la curva plana inicial γ y la región abierta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ donde deseamos no sólo la existencia sino la unicidad de la solución: la región Ω tiene que ser cubierta por curvas características planas que intersectan la curva γ en exactamente un punto. Parametrizando la curva γ por $(\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, donde I es un intervalo abierto (acotado o no), podemos enunciar el problema en la forma

$$\begin{aligned} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= c(x,y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Hacemos las siguientes hipótesis adicionales:

(i) la curva inicial plana γ es una curva suave, es decir, las funciones σ, ρ son continuamente diferenciatles en I y $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in I$;

(ii) $f \in C^1(I)$;

(iii) $a, b, c \in C^1(\Omega)$ y las funciones a y b no se anulan simultáneamente en Ω, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto conteniendo γ (la vecindad de la curva donde resolveremos el problema está contenida en Ω).

Para resolver el problema (2.2.2) usando las ideas de la primera sección, lo primero que debemos hacer es hallar las curvas caracteristicas planas de la ecuación (2.2.1). Como vimos anteriormente, esas son curvas a lo largo de las cuales la EDP puede ser escrita como una derivada total. Si $\mathcal{C}$ es una curva característica plana parametrizada por $(\alpha(s), \beta(s))$ entonces la derivada total de u a lo largo de $\mathcal{C}$ es, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)) \tag{2.2.3}$$

por otro lado, la EDP (2.2.1) a lo largo de $\mathcal{C}$ resulta

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \tag{2.2.4}$$

Por tanto, si deseamos que el lado izquierdo de la ecuación (2.2.4) sea igual a cualquiera de las expresiones en (2.2.3), es necesario que, para cada s, exista un número real $\lambda(s) \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

ese caso la ecuación resulta

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \tag{2.2.6}$$

Las condiciones (2.2.5) significan, geométricamente, que el vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(\alpha(s), \beta(s))$ es paralelo al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$.

La función $\lambda(s)$ es de hecho innecesaria pues basta reparametrizar la curva convenientemente. Para probar esta afirmación, observe en primer lugar que la función λ es continua desde que la curva $\mathcal{C}$ es suave (por hipótesis) y las funciones a y b no se anulan simultáneamente. Tomando entonces cualquier primitiva Λ de λ como $\Lambda'(s) = \lambda(s) \neq 0$, para cualquier s, $\Lambda'(s) > 0$ o $\Lambda'(s) < 0$ (por continuidad) para todo s, luego Λ es una función monótona creciente o decreciente, por consiguiente invertible (vea [A1]) y podemos hacer un cambio de variable $s = \Lambda^{-1}(t)$ ó $t = \Lambda(s)$ para obtener una nueva parametrización $(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$ de la curva $\mathcal{C}$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= \alpha(s) = \alpha\left(\Lambda^{-1}(t)\right), \\ \tilde{\beta}(t) &= \beta(s) = \beta\left(\Lambda^{-1}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Pero entonces, de (2.2.7) y (2.2.5) obtenemos

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = \alpha'(s)\frac{1}{\Lambda'\left(\Lambda^{-1}(t)\right)} = \frac{\alpha'(s)}{\lambda(s)} = a(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$$

y, análogamente,

$$\tilde{\beta}'(t) = \frac{\beta'(s)}{\lambda(s)} = b(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)).$$

Por tanto las *curvas caracteristicas planas* de la ecuación (2.2.1) son las curvas suaves $\mathcal{C}$ que admiten parametrización $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

El sistema de EDOs dado por (2.2.8) tiene infinitas soluciones: para obtener una única solución es necesario dar un par de condiciones iniciales. Pero precisamente, recordando los resultados sobre sistemal de EDOs (vea el teorema de Picard en [S] o el Capítulo 7 de [S i]): como $a, b \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe una solución $(\alpha(s), \beta(s))$ de (2.2.8) para s en una vecindad de s_0 tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0. \tag{2.2.9}$$

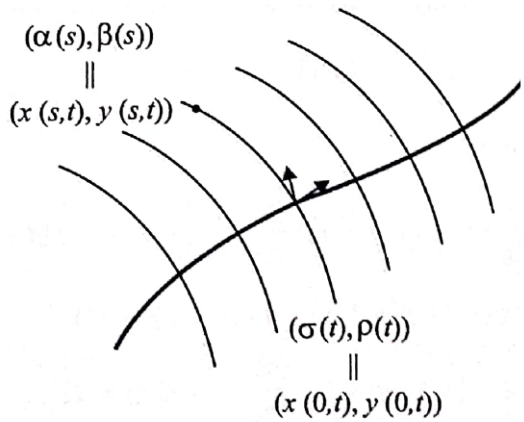

Figura 2.3: La solución se obtiene integrando a lo largo de las caracteristicas planas.

Como vimos en los ejemplos de la sección anterior, la existencia y la unicidad de solución del problema (2.2.2) depende de cómo las curvas caracteristicas intersectan la curva inicial. Consideremos en primer lugar el caso análogo al problema (2.1.1), esto es, supongamos que la curya inicial γ nunca es tangente a las curvas características planas: en otras palabras, el vector tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ nunca es paralelo $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$. Usando la terminología del álgebra lineal, los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes, $\forall t \in I$. Con esa hipótesis, para cada $t \in I$, existe una única curva caracteristica plana pasando por el punto $(\sigma(t), \rho(t))$, o sea, que es solución de (2.2.8) y (2.2.9) con $x_0 = \sigma(t)$, $y_0 = \rho(t)$ en una vecindad de s_0 (que consideraremos igual a cero para simplificar la notación): además, $(\sigma(t), \rho(t))$ es el único punto de intersección de γ con la característica pues, si existiese otro, en algun lugar los vectores tangentes a las dos curvas serian paralelos, lo que contradice la hipótesis. En tal caso podemos entonces cubrir una vecindad de la curva γ con curvas características planas que intersecta la curva γ en exáctamente un punto. Ello nos permite hacer un cambio de variable de (x, y) para (s, t): para cada $t \in I$, si denotamos la curva característica plana que pasa por $(\sigma(t), \rho(t))$ por $(x(s, t), y(s, t))$, entonces el sistema (2.2.8) y las condiciones (2.2.9) pueden reenunciarse como

$$\begin{aligned} x_s(s,t) &= a(x(s,t), y(s,t)), \\ y_s(s,t) &= b(x(s,t), y(s,t)), \\ x(0,t) &= \sigma(t) \\ y(0,t) &= \rho(t) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

además, como los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b((\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes,

$$\det \begin{pmatrix} x_s(0,t) & x_t(0,t) \\ y_s(0,t) & y_t(0,t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

y en consecuencia, por continuidad,

$$\det \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} \neq 0$$

en una vecindad de γ. Luego la transformación $(s,t) \to (x(s,t), y(s,t))$ es localmente inyectiva, lo que nos permite hacer un cambio de variable (vea [Fu])

$$v(s,t) = u(x,y) \tag{2.2.11}$$

obtenemos, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s}(s,t) =& \frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s} \\ =& a(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \\ &+ b(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Sustituyendo la EDP (2.2.1) en (2.2.12), obtenemos

$$v_s = c(x(s,t), y(s,t)).$$

Además la condición inicial del problema (2.2.2) queda

$$v(0,t) = f(t), t \in I,$$

luego el problema que v satiaface es

$$\begin{aligned} v_s &= c(x(s,t), y(s,t), \\ v(0,t) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Para cada $t \in I$ fijo, el problema (2.2.13) es un problema de valor inicial para una EDO de primer orden, cuya solución se obtiene integrando directamente de $s = 0$ a s; se tiene entonces

$$v(s,t) = \int_0^s v_s(\nu,t)d\nu + v(0,t) = \int_0^s c(x(\nu,t), y(\nu,t))d\nu + f(t). \tag{2.2.14}$$

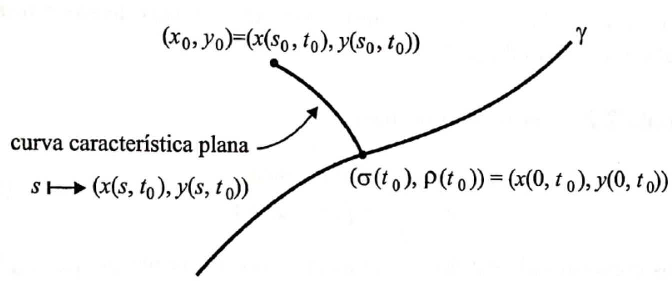

Figura 2.4: La solución en el punto $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ se obtiene integrando la EDP a lo largo de la característica plana que pasa por (x_0, y_0) de $s = 0$ hasta $s = s_0$.

Para volver a u, dado (x_0, y_0), sea $t_0 = t(x_0, y_0)$ y $s_0 = s(x_0, y_0)$, es decir, $x_0 = x(s_0, t_0)$ e $y_0 = y(s_0, t_0)$; sustituyendo (2.2.11) en (2.2.14), obtenemos

$$u(x,t) = \int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))ds + f(t_0). \tag{2.2.15}$$

Observe que, si u es solución de (2.2.2), entonces u satistace (2.2.15); como (2.2.15) es de hecho solución de (2.2.2) (pues (2.2.14) es solución de (2.2.13)), la solución del problema (2.2.2) es única. Acabamos de probar entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, γ una curva suave en Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\alpha(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ y $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponga que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$, y*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Entonces el problema (2.2.2) tiene una única solución de clase C^1 en una vecindad de la curva γ en Ω dada por (2.2.15).

El gráfico de la solución u del problema (2.2.2) es una superficie $z = u(x,y)$ en $\mathbb{R}^3$, llamada superficie solución. Otra parametrización de esta superficie es dada por las variables s, t, esto es,

$$(s,t) \to (x(s,t), y(s,t), v(s,t))$$

es una parametrización de la superficie solución en donde v es dada por (2.2.14) y x, y satisfacen (2.2.10).

En un problema específico, normalmente es más fácil hallar las curvas características planas directamente e integrar a lo largo de dichas curvas que utilizar la fórmula (2.2.15).

Ejemplo 2.2.1 *Considere el problema*

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy \\ u(x,0) &= f(x), x > 0. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Vamos a comenzar calculando las curvas características planas para la EDP en (2.2.16). Buscamos entonces curvas $s \to (\alpha(s), \beta(s))$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\beta(s), \\ \beta'(s) &= \alpha(s). \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\alpha(s)$, la segunda por $\beta(s)$ y sumando, obtenemos

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\alpha(s)^2 + \beta(s)^2\right) = 0 \Rightarrow \alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = cte.$$

Por consiguiente las curvas características planas para la EDP en (2.2.16) son circulos centrados en el origen. Como la curva inicial es el semieje $y = 0$, $x > 0$, la curva inicial intersecta ortogonalmente *cada característica plana en exáctamente un punto y todos los puntos en* $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ *están en algunas de dichas características.*

A lo largo del círculo de radio r *centrado en el origen, la EDP queda*

$$\frac{d}{d\theta}u(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) = 4r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta).$$

Usando entonces coordenadas polares para integrar la EDP, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta d\theta + u(r,0) \\ &= 2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) \\ &= 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución del problema (2.2.16) *es*

$$u(x,y) = 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}. \tag{2.2.18}$$

Observe que, como $\sqrt{x^2+y^2}$ *no es diferenciable en el origen, la diferenciabilidad de* u *depende de* f.

Ejemplo 2.2.2 *Resolvamos el problema*

$$\begin{aligned} &2yu_x + u_y = \left(2y^2 + x\right)\mathrm{sen}(2xy) \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ &u\left(x, e^{-2x}\right) = \cos^2\left(xe^{-2x}\right). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Las características planas satisfacen

$$\begin{cases} \alpha'(s) = 2\beta(s) \\ \beta'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'(s) = 2s + 2c_1 \\ \beta(s) = s + c_1 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} \alpha(s) = s^2 + 2sc_1 + c_2 = (s+c_1)^2 + c_2 - c_1^2 \\ \beta(s) = s + c_1. \end{cases}$$

Por tanto las curvas características planas son parábolas de la forma $x = y^2 + c$.

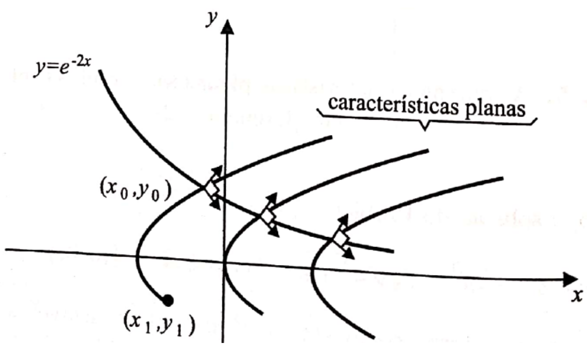

Figura 2.5: Las características planas son parábolas

Observe que, en el punto (x_0, y_0) *de intersección de la curva inicial* $y = e^{-2x}$ *con la parábola* $x = y^2 + x_0 - y_0^2$, *las tangentes son ortogonales pues la recta tangente a la parábola en el punto* (x_0, y_0) *tiene inclinación* $\frac{1}{2y_0}$ *mientras que la recta tangente a la curva inicial en el mismo punto tiene inclinación* $-2y_0$. *Estamos por tanto en las condiciones del teorema* (2.2.1). *Dado cualquier punto* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *él está en la parábola* $x = y^2 + x_1 - y_1^2$, *que intersecta la curva inicial en el punto* (x_0, y_0) *donde*

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0^2 + x_1 - y_1^2, \\ y_0 &= e^{-2x_0}; \end{aligned}$$

parametrizando la parábola por $s \to \left(s^2 + x_1 - y_1^2, s\right)$, *obtenemos:*

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds} u\left(s^2 + x_1 - y_1^2, s\right) ds + u(x_0, y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} \left(3s^2 + x_1 - y_1^2\right) \operatorname{sen}\left(2s^3 + 2s\left(x_1 - y_1^2\right)\right) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} \left(3s^2 + x_1 - y_1^2\right) 2 \operatorname{sen}\left(s^3 + s\left(x_1 - y_1^2\right)\right) \cos\left(s^3 + s\left(x_1 - y_1^2\right)\right) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0\left(y_0^2 + x_1 - y_1^2\right)}^{y_1\left(y_1^2 + x_1 - y_1^2\right)} 2 \operatorname{sen} r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2 r \Big|_{r = x_0 y_0}^{r = x_1 y_1} + \cos^2(x_0 y_0) = \cos^2(x_1 y_1). \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución del problema (2.2.2) *es*

$$u(x, y) = \cos^2(xy).$$

2.3 Solución General

La teoría de las EDPs lineales de primer orden con dos variables independientes se asemeja más a la teoria de las EDO que a la de las EDPs. De hecho, es esa semejanza con las EDOs que nos permitirá hallar la solución general de tales ecuaciones.

Vamos a considerar el operador diferencial lineal de primer orden

$$L = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \tag{2.3.1}$$

esto es,

$$Lu = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u,$$

y vamos a estudiar la ecuación

$$Lu = d(x, y) \tag{2.3.2}$$

en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, suponiendo que $a, b, c, d \in C(\Omega)$.

La idea del método que usaremos es bastante simple: para resolver la ecuación (2.3.2), procuraremos realizar un cambio de variable $s = s(x, y), t = t(x, y)$ que la transforme en una ecuación donde sólo aparezca la derivada con respecto a una de las variables (que escogeremos s), lo que nos permitirá resolver la ecuación como si fuese una EDO, fijando la otra variable (que será t).

Antes de describir el método en general, vamos a resolver algunas ecuaciones particulares para ilustrarlo.

Ejemplo 2.3.1 *Busquemos la solución general de la ecuación*

$$xu_x + u = x^2 \tag{2.3.3}$$

en el semiplano $x > 0$. Observe que la ecuación está en la forma deseada, ya que no aparece la derivada respecto de y (esto es, $b = 0$). Para cada y fijo, la ecuación (2.3.3) es una EDO y puede reenunciarse como

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu) = x^2;$$

integrando respecto a x, obtenemos

$$xu = \frac{x^3}{3} + f(y)$$

por consiguiente la solución general de (2.3.3) es dada por

$$u(x, y) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} f(y)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

Ejemplo 2.3.2 *Busquemos ahora la solución general de la ecuación*

$$-2yu_x + u_y = ye^x \tag{2.3.4}$$

en todo el plano. En este ejemplo podemos usar las ideas desarrolladas en la segunda sección para encontrar la solución general: con ayuda de las curvas características planas y de una curva auxiliar que intercepta transversalmente dichas características, podemos realizar un cambio de variable $s = s(x, y), t = t(x, y)$ con la finalidad de obtener una ecuación más simple. Las curvas características planas para la ecuación (2.3.4) son dadas por

$$\begin{cases} x'(s) = -2y(s) \\ y'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = -s^2 - 2sc_1 + c_2 = -\left(s + c_1\right)^2 + c_1^2 + c_2 \\ y(s) = s + c_1 \end{cases}$$

y por consiguiente las características planas son las parábolas $x = -y^2 + k$, k constante. Tomando como curva auxiliar el eje de las x, buscamos s y t con (vea (2.2.10))

$$\begin{aligned} &x(s, t) = -\left(s + c_1(t)\right)^2 + c_2(t), \quad x(0, t) = t, \\ &y(s, t) = s + c_1(t), y(0, t) = 0; \end{aligned}$$

entonces obtenemos

$$x = -s^2 + t, \quad y = s$$

o, equivalentemente,

$$s = y, \quad t = x + y^2. \tag{2.3.5}$$

Observe que t *es constante a lo largo de las características planas y la curva auxiliar corresponde a* $s = 0$. *Efectuando el cambio de variable* (2.3.5) *y tomando* $v(s,t) = u(x,y)$, v *satisface la ecuación*

$$v_s = s e^{-s^2+t}$$

cuya solución general es dada por

$$v(s,t) = -\frac{1}{2} e^{-s^2+t} + f(t);$$

en consecuencia la solución general de (2.3.4) *es dada por*

$$u(x,y) = -\frac{1}{2} e^{x} + f\left(x + y^2\right),$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ *es arbitraria.*

Ejemplo 2.3.3 *Buscaremos ahora la solución general de una ecuación con coeficientes constantes:*

$$a u_x + b u_y + c u = d \tag{2.3.6}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $a^2 + b^2 \neq 0$. *Como en el ejemplo anterior, vamos a procurar un cambio de variable que ponga la ecuación* (2.3.6) *en una forma más simple, es decir, un cambio* $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ *tal que* t *es constante a lo largo de las características planas. Para la ecuación* (2.3.6), *las características planas satisfacen*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(s) = a \\ y'(s) = b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{array} \right.$$

y por tanto las características planas son las rectas $ay - bx = k_1$, k_1 *constante; las rectas ortogonales a ellas son las rectas* $by + ax = k_2$, k_2 *constante. Tomando entonces* t *constante a lo largo de las características planas y* s *constante a lo largo de las rectas ortogonales, obtenemos*

$$\begin{aligned} s &= ax + by \\ t &= -bx + ay \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Con el cambio de variable (2.3.7), *la ecuación* (2.3.6) *resulta*

$$\left(a^2 + b^2\right) v_s + cv = d. \tag{2.3.8}$$

Para cada t *fijo, la ecuación* (2.3.8) *es una EDO de primer orden con factor integrante*

$$\frac{1}{a^2+b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right) \tag{2.3.9}$$

multiplicando (2.3.8) *por* (2.3.9), *obtenemos,*

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[v \exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right)\right] = \frac{d}{a^2+b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right).$$

Luego, si $c \neq 0$, *la solución general de* (2.3.6) *es*

$$v(s,t) = \frac{d}{c} + f(t) \exp\left(\frac{-cs}{a^2+b^2}\right)$$

y la solución general de (2.3.6) *es*

$$u(x,y) = \frac{d}{c} + f(-bx+ay)\exp\left(\frac{-c}{a^2+b^2}(ax+by)\right);$$

en el caso que $c=0$, *la solución general de* (2.3.8) *es*

$$v(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2}s + f(t)$$

y la solución general de (2.3.6) *es*

$$u(x,y) = \frac{d}{a^2+b^2}(ax+by) + f(-bx+ay)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ *es arbitraria.*

La idea utilizada en el ejemplo precedente puede aplicarse aun en el caso en que los coeficientes no sean constantes. Las curvas caracteristicas planas de la ecuación (2.3.2) satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s),y(s)) \\ y'(s) &= b(x(s),y(s)) \end{aligned}$$

y por tanto son soluciones de la EDO de primer orden

$$a(x,y)dy - b(x,y)dx = 0. \tag{2.3.10}$$

Si las soluciones de la (2.3.10) son de la forma $t(x,y)=k$, donde k es una constante arbitraria, es natural tomar t como una de nuestras nuevas variables. Existe cierta libertad al escoger la variable s: basta garantizar que $s=s(x,y)$, $t=t(x,y)$ de hecho es un cambio de variable de clase C^1 en Ω y, para ello, basta que el jacobiano

$$\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}$$

nunca se anule en Ω. Observe que si t_y nunca se anula en Ω (respectivamente, t_x nunca se anula en Ω) podemos tomar $s=x$ (respectivamente, $s=y$). Note también que, si s es constante a lo largo de las trayectorias ortogonales a las características planas, como en el ejemplo 2.3.3, el jacobiano nunca se anula pues las curvas de nivel de las funciones s y t son ortogonales, luego los gradientes son ortogonales y por lo tanto linealmente independientes. Es claro que las trayectorias ortogonales son soluciones de la EDO

$$b(x,y)dy + a(x,y)dx = 0.$$

Ejemplo 2.3.4 *Hallar la solución general de*

$$x^2u_x - xyu_y + yu = xy^2 \tag{2.3.11}$$

en el semiplano $x<0$. *En este caso las curvas características planas son soluciones de la EDO*

$$x^2dy + xydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{k}{x}.$$

luego podemos tomar $t = xy$; como $t_y \neq 0$, podemos escoger $s = x$, obteniendo entonces el cambio de variable

$$s = x, t = xy.$$

Tomando $v(s,t) = u(x,y), u$ satisface la EDP

$$s^2 v_s + \frac{t}{s} v = \frac{t^2}{s}$$

que tiene como factor integrante

$$\frac{1}{s^2} \exp\left(\int \frac{t}{s^3} ds\right) = \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right)$$

multiplicando la ecuación (3.15) por el factor integrante, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(v \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right)\right) = \frac{t^2}{s^3} \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right)$$

y por tanto la solución general de (3.15) es

$$v(s,t) = t + f(t) \exp\left(\frac{t}{2s^2}\right).$$

Y volviendo a las variables x e y, la solución general de (2.3.11) *es*

$$u(x,y) = xy + f(xy) \exp\left(\frac{y}{2x}\right), x < 0,$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

Ejemplo 2.3.5 *Hallar la solución general de la ecuación*

$$xu_x + (x-1)u_y + xu = e^{x-y}. \tag{2.3.12}$$

Las curvas características planas son soluciones de

$$\begin{aligned} xdy - (x-1)dx = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow y = x - \ln|x| + c \Rightarrow e^y = e^x \frac{1}{|x|} e^c \Rightarrow xe^{y-x} = k \end{aligned}$$

luego $t(x,y) = xe^{y-x}$. En este caso tanto t_x como t_y se anulan en algún punto. Mientras tanto, si tomamos $s = y - x$, obtenemos

$$\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ (1-x)e^{y-x} & xe^{y-x} \end{vmatrix} = -e^{y-x} \neq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo entonces el cambio de variable

$$s = y - x, t = xe^{y-x}.$$

y tomando $v(s,t) = u(x,y)$, v *satisface la EDP*

$$v_s - te^{-s}v = -e^{-s}; \tag{2.3.13}$$

multiplicando por el factor integrante $e^{te^{-s}}$, *obienemos*

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(ve^{te^{-s}}\right) = -e^{-s}e^{te^{-s}}$$

cuya solución es dada por

$$v(s,t) = \frac{1}{t} + f(t)e^{-te^{s}}. \tag{2.3.14}$$

Es interesante observar que, aunque los coeficientes de la ecuación (2.3.13) *sean infinitamente diferenciables, la solucion* (2.3.14) *tiene una discontinuidad en* $t = 0$. *Volviendo a las variables* $x \in y$, *ootenemos*

$$u(x,y) = \frac{e^{x-y}}{x} + f\left(xe^{y-x}\right)e^{-x}, x \neq 0,$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R} - 0)$ *arbitraria.*

2.4 Ejercicios

Sección 1: Algunos Ejemplos

1. Resuelva:

   (i)
   $$\begin{aligned} &u_y = x^2 + y^2, \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ &u\left(x, x^2\right) = x + x^2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   (ii)
   $$\begin{aligned} &u_y = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = x, x > 0. \end{aligned}$$

2. Verifique si los siguientes problemas tienen solución y, en ese caso, halle las soluciones.

   (i)
   $$\begin{aligned} &u_y = xe^y \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ &u\left(y^2, y\right) = e^{y^2} + y^4, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (ii)
   $$\begin{aligned} &u_y = xe^y, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ &u\left(y^2, y\right) = y^2e^y, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   (iii)
   $$\begin{aligned} &u_x = 2xy, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ &u\left(e^y, y\right) = y^2 + 1, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iv)

$$u_x = 2xy, (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u\left(x, x^2\right) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

(v)

$$u_x = 2xy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$u\left(x, x^2\right) = x, x \in \mathbb{R}$$

3. Pruebe que el problema

$$u_x = h(x,y), (x,y) \text{ en } \mathbb{R}^2,$$
$$u(p(y), y) = f(y), y \text{ en } \mathbb{R},$$

tiene una única solución $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ y halle una fórmula para u, suponiendo que $h \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ y $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son conocidas.

Sección 2. El Problema de Cauchy

1. Halle las curvas caracteristicas planas de las siguientes ecuaciones:

   (i) $3u_x - 4u_y = x^2$.

   (i) $5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}$.

   (iii) $u_x - 3u_y = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$.

   (iv) $u_x - au_y = e^{mx}\cos(by)$, $\quad (a, b, m$ constantes).

   (v) $x^2u_x + y^2u_y = x^3$.

   (vi) $u_x + xu_y = x^3 + 3xy$.

   (vii) $x^2u_x - xyu_y = 2x^3 + x^2y + x^2 + \dfrac{x^3y}{x+1}$.

   (viii) $x^2u_x + y^2u_y = axu$, (a constante).

   (ix) $u_x + a\cos(x)u_y = \cos(x) + y$, ($a$ constante).

2. Resuelva, indicando la región del plano donde la solución es válida:

   (i)

$$3u_x - 4u_y = x^2$$
$$u\left(x, \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{9}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (ii)

$$5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}$$
$$u(4t, -5t+1) = te^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (iii)

$$u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y$$
$$u(t,t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (p \text{ una función dada}).$$

(iv)
$$\begin{aligned}&u_x - a u_y = e^{mx}\cos(by), \quad (a, b, m \text{ constantes}).\\&u(at,t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (p \text{ una función dada}).\end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned}&x^2 u_x + y^2 u_y = x^3\\&u(x,1) = 1; \quad x > 0.\end{aligned}$$

(vi)
$$\begin{aligned}&u_x + x u_y = x^3 + 3xy\\&u(0,y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(vii)
$$\begin{aligned}&x^2 u_x - xy u_y = 2x^3 + x^2 y + x^2 + \frac{x^3 y}{x+1}\\&u(t,t+1) = t^2 + t, \quad t > 0.\end{aligned}$$

(viii)
$$\begin{aligned}&x^2 u_x + y^2 u_y = axy, \quad (a \text{ constante,})\\&u(1,t) = a, \quad t > 0.\end{aligned}$$

(ix)
$$\begin{aligned}&u_x + a\cos(x) u_y = \cos(x) + y \quad (a \text{ constante, } a \neq 0)\\&u(\pi/2, y) = (\ln(\operatorname{sen} y))/a, \quad 0 < y < \pi.\end{aligned}$$

3. La resolución de problemas de Cauchy para ecuaciones casi lineales es bastante similar al caso lineal, la diferencia es que en el caso casi lineal precisamos trabajar con curvas en $\mathbb{R}^3$. Definimos: una *curva característica* para la EDP

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{2.4.1}$$

es una curva suave que admite una parametrización

$$\mathcal{C} : t \in I \to (\alpha(t), \beta(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

I un intervalo abierto, tal que
$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= a(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)),\\\beta'(t) &= b(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)),\\\eta'(t) &= c(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)).\end{aligned}$$

Una curva suave $\Gamma : t \in I \to \big(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ es llamada regular para la EDP (2.4.1) si los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)), b(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)))$ nunca son paralelos cualesquiera que sea $t \in I$. Como en el caso lineal, es posible mostrar que, si Γ es una curva regular, existe una única solución clásica para el problema de Cauchy para la EDP (2.4.1) con condición inicial $u(\sigma(t), \rho(t)) = \xi(t), t \in I$, en una región abierta del plano que contiene la curva plana $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in l$. La solución es obtenida integrándose a lo largo de las características (en $\mathbb{R}^3$) que intersectan la curva Γ; esto corresponde a resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_s(s,t) &= a(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad x(0,t) = \sigma(t).\\y_s(s,t) &= b(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad y(0,t) = \rho(t),\\v_s(s,t) &= c(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad v(0,t) = \xi(t).\end{aligned}$$

y tomar $u(x,y) = v(s,t)$. Utilice esas ideas para resolver los problemas a continuación, indicando la región donde la solución es válida:

(i)
$$xu_x - yu_y = u^2$$
$$u(x,1) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii)
$$uu_x - xu_y = y$$
$$u(0,y) = -y, \quad y > 0.$$

(iii)
$$2yu_x + u_y = 2xyu$$
$$u(t,0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv)
$$-yu_x + xu_y = u^2 + 1$$
$$u(x,0) = -x^2, x > 0.$$

(v)
$$uu_x + uu_y = -x - y$$
$$u(t,-t) = 2t, \quad t > 0.$$

(vi)
$$x^2u_x + y^2u_y = u^2$$
$$u(t,2t) = 1, \quad t > 0.$$

(vii)
$$\left(x^2 + y^2\right) u_x + 2xyu_y = xu$$
$$u(a, a\cos t) = a \text{ sen } t, \quad 0 < t < \pi \quad (a \text{ constante}, \ a > 0).$$

Sección 3: Solución General

1. Halle la solución general de cada una de las siguientes EDPs:

   (i) $u_y = x^2 + y^2$.
   (ii) $u_x = \text{sen}(x/y)$.
   (iii) $3u_x - 4u_y = x^2$.
   (iv) $u_x - 3u_y = \text{sen}\, x + \cos y$.
   (v) $u_x - au_y = e^{mx}\cos(by), \quad \left(a, b, m \text{ constantes}, \ m^2 + a^2b^2 \neq 0\right)$.
   (vi) $yu_x - xu_y = 0$.
   (vii) $u_x - 4u_y + u = x + y + 1$.
   (viii) $u_x + xu = x^3 + 3xy$.
   (ix) $x^2u_x - xyu_y + yu = y$.
   (x) $5u_x + 4u_y + u = x^3 + 1 + 2e^{3y}$.

(xi) $xyu_x - x^2u_y + yu = 0$.

(xii) $(x+\alpha)u_x + (y+\beta)u_y + \gamma u = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma$ constantes.)

2. Haga el cambio de variable $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$ para obtener la solución general de cada una de las EDP's siguientes:

(i) $2xu_x - yu_y = 0$.

(ii) $2xu_x + 3yu_y = \ln|x|$.

(iii) $xu_x - 7yu_y = x^2y$.

(iv) $8xu_x - 5yu_y + 4u = x^2 \cos x$.

(v) $\alpha xu_x + \beta yu_y + \gamma u = x^2 + y^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma$ constantes.)

3. (Antes de resolver cada uno de estos problemas, vea el ejercicio 3 de la segunda sección.) Para cada una de las EDP's siguientes, halle las curvas características en R^3 y, con la ayuda de una curva regular arbitraria, halle la solución general:

(i) $u_x + xu_y = u$.

(ii) $u_x + u_y = u$.

(iii) $x^2u_x + y^2u_y = xu$.

(iv) $xyu_x - yu_y = xy + x - u$.