CAPÍTULO 3

Sucesiones numéricas y series

Como indica el título, este capítulo tratará principalmente sobre sucesiones y series de números complejos. Sin embargo, los hechos fundamentales sobre convergencia se explican con la misma facilidad para casos más generales. Las tres primeras secciones tratarán, en consecuencia, de sucesiones en espacios euclideanos, o incluso en espacios métricos.

3.1 Sucesiones convergentes

Definición 3.1 *Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X, converge si hay un punto $p \in X$ con las siguientes propiedades: para cada $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$. (d representa la distancia en X.)*
En este caso, decimos también que $\{p_n\}$ converge hacia p, o que p es el limite de $\{p_n\}$ [ver el Teorema 3.1(b)] y escribimos $p_n \to p$, o

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Si $\{p_n\}$ no converge, se dice que diverge.

Puede ser conveniente hacer resaltar que nuestra definición de «sucesión convergente» depende no solamente de $\{p_n\}$, sino también de X; por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ converge en $\mathbb{R}^1$ (hacia 0), pero no lo hace en el conjunto de los números reales positivos [con $d(x,y) = |x-y|$]. En casos de posible ambigüedad, debemos ser más precisos y especificar «convergente en X», mejor que solamente «convergente».

Recordemos que el conjunto de todos los puntos p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ es el rango de $\{p_n\}$. El rango de una sucesión puede ser un conjunto finito, o puede ser infinito. Se dice que la sucesión $\{p_n\}$ es acotada si lo es su rango.

Como ejemplo, consideremos las siguientes sucesiones de números complejos (esto es, $X = \mathbb{R}^2$).

(a) Si $s_n = 1/n$, es $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; el rango es infinito y la sucesión es acotada.

(b) Si $s_n = n^2$, la sucesión $\{s_n\}$ no es acotada, es divergente y tiene un rango infinito.

(c) Si $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$, la sucesión $\{s_n\}$ converge hacia 1, es acotada y tiene rango infinito.

(d) Si $s_n = i^n$, la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, es acotada, y tiene un rango finito.

(e) Si $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, $\{s_n\}$ converge hacia 1 , es acotado y tiene un rango finito.

Resumiremos a continuacion algunas propiedades importantes de las sucesiones convergentes en espacios métricos.

Teorema 3.1 *Sea $\{p_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X.*
(a) $\{p_n\}$ converge hacia $p \in X$ si, y solo si toda vecindad de p contiene todos los términos de $\{p_n\}$, salvo un número finito de ellos.
(b) Si $p \in X$; $p' \in X$ y $\{p_n\}$ convergen hacia p y hacia p' entonces $p' = p$.
(c) Si $\{p_n\}$ converge, entonces $\{p_n\}$ es acotada.
(d) Si $E \subset X$ y p es un punto de límite de E, existe una sucesión $\{p_n\}$ en E para la cual $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Demostración: *(a) Supongamos $p_n \to p$ y sea V una vecindad de p. Para algún $\varepsilon > 0$, las condiciones $d(p, q) < \varepsilon$ y $q \in X$ implican que $q \in V$. En correspondencia con este ε, existe un N tal que $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$. Por tanto, $n \geq N$ implica que $p_n \in V$.*

Inversamente, supongamos que toda vecindad de p contiene a todos los p_n, salvo un número finito. Tomemos $\varepsilon > 0$, y sea V el conjunto de todos los $q \in X$ tales que $d(p, q) < \varepsilon$. Por hipótesis, existe un N (correspondiente a este V) tal que $p_n \in V$ si $n \geq N$. Asi pues, $d(p_n, p) < \varepsilon$ si $n \geq N$ y, por tanto $p_n \to p$.

(b) Sea un $\varepsilon > 0$, dado. Existen dos enteros N, N' tales que

$$n \geq N \text{ implica } d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geq N' \text{ implica } d\left(p_n, p'\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí, si $n \geq \max(N, N')$, tenemos

$$d\left(p, p'\right) \leq d(p, p_n) + d\left(p_n, p'\right) < \varepsilon.$$

Como ε era arbitrario, se deduce que $d(p, q') = 0$.

(c) Supongamos que $p_n \to p$. Existe un entero N tal que $n > N$ implica que $d(p_n, p) < 1$. Hagamos

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}$$

Entonces, $d(p_n, p) \leq r$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(d) Para todo entero positivo n, hay un punto $p_n \in E$, tal que $d(p_n, p) < 1/n$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $N\varepsilon > 1$. Si $n > N$, se deduce que $d(p_n, p) < \varepsilon$. Por tanto, $p_n \to p$, lo que completa la demostración.

Podemos estudiar la relación entre la convergencia y las operaciones algebraicas, para las sucesiones en $\mathbb{R}^k$. Consideremos primeramente sucesiones de números complejos.

Teorema 3.2 *Supongamos que* $\{s_n\},\{t_n\}$ *son sucesiones complejas y* $\lim_{n\to\infty} s_n = s, \lim_{n\to\infty} t_n = t$. *Se verificará*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs,\ \lim\limits_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$, *para cualquier número* c;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s}$, *siempre que* $s_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \ldots)$, *y* $s \neq 0$.

Demostración: *(a) Dado* $\varepsilon > 0$, *existen dos enteros* N_1, N_2 *tales que*

$$\begin{array}{ll} n \geq N_1 \text{ implica} & |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_2 \text{ implica} & |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array}$$

Si $N = \max(N_1, N_2), n \geq N$ *implica*

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

Lo que demuestra (a). La demostracion de (b) es elemental.

(c) Utilizaremos la identidad

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s). \tag{3.1.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existen dos enteros* N_1, N_2 *tales que*

$$\begin{array}{l} n \geq N_1 \text{ implica } |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}, \\ n \geq N_2 \text{ implica } |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}. \end{array}$$

Si tomamos $N = \max(N_1, N_2)$, $n \geq N$ *implica*

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon,$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0$$

Apliquemos (a) y (b) a (3.1.1). *Se deduce que*

$$\lim_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

(d) Eligiendo m *de modo que* $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$, *si* $n \geq m$, *vemos que*

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \quad (n \geq m)$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe un entero* $N > m$ *tal que* $n \geq N$ *implica que*

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon.$$

Por tanto, para $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon.$$

Teorema 3.3

(a) *Supongamos* $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *y*

$$\boldsymbol{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n})$$

$\{\boldsymbol{x}_n\}$ *converge hacia* $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *si, y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \quad (1 \le j \le k). \tag{3.1.2}$$

(b) *Supongamos que* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *e* $\{\boldsymbol{y}_n\}$ *son sucesiones en* $\mathbb{R}^k$, $\{\beta_n\}$ *es una sucesión de números reales, y* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$, $\beta_n \to \beta$. *Tendremos que*

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n \boldsymbol{x}_n = \beta \boldsymbol{x}$$

Demostración: *(a) Si* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, *las desigualdades*

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \le |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|,$$

que se deducen inmediatamente de la definición de la norma de $\mathbb{R}^k$ *demuestran que se cumple* (3.1.2).

Inversamente, si se cumple (3.1.2), *a cada* $\varepsilon > 0$ *corresponde un entero* N *tal que* $n \ge N$ *implica que*

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad (1 \le j \le k)$$

y por tanto, $n \ge N$ *implica que*

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon$$

por lo que, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, *lo que demuestra (a).*

El apartado (b) *se deduce de* (a) *y del Teorema 3.2.*

3.2 Subsucesiones

Definición 3.2 *Dada una sucesión* $\{p_n\}$, *consideremos otra* $\{n_k\}$ *constituida por enteros positivos, de modo que* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. *La sucesión* $\{p_{ni}\}$ *se llama subsucesión de* $\{p_n\}$. *Si* $\{p_{ni}\}$ *converge, su límite se llama limite subsecuencial de* $\{p_n\}$.

Es claro que $\{p_n\}$ converge hacia p si, y solo si toda subsucesión de $\{p_n\}$ converge hacia p. Dejamos los detalles de la demostración al lector.

Teorema 3.4

(a) *Si* $\{p_n\}$ *es una sucesión en un espacio métrico compacto* X, *entonces alguna subsucesión de*

$\{p_n\}$ converge hacia un punto de X.

(b) Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ contiene una subsucesión convergente.

Demostración: *(a) Sea E el rango de $\{p_n\}$. Si E es finito entonces hay un $p \in E$ y una sucesión $\{n_i\}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, tales que*

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p$$

La subsucesión $\{p_{n_i}\}$ así obtenida converge evidentemente hacia p.

Si E es infinito, el Teorema 2.17 muestra que E tiene un punto límite $p \in X$. Si se escoge n_1 de tal forma que $d(p, p_{n_1}) < 1$. Después de escoger $n_1, \ldots, n_{i-1}$, el Teorema 2.6 indica que hay un entero $n_i > n_{i-1}$ tal que $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. Por lo tanto $\{p_{n_i}\}$ converge hacia p.

(b) Esto se concluye de (a), porque el Teorema 2.21 implica que cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^k$ está en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 3.5 *Los limites subsecuenciales de una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X forman un subconjunto cerrado de X.*

Demostración: *Sea E^* el conjunto de los límites subsecuenciales de $\{p_n\}$ y sea q un punto límite de E^*. Se tiene que mostrar que $q \in E^*$.*

Si se escoge n_1 de manera que $p_{n_1} \neq q$. (Si tal n_1 no existe, entonces E^* tiene solo un punto, y no hay nada que demostrar.) Hágase $\delta = d(q, p_{n_1})$ y supóngase que se han escogido $n_1, \ldots, n_{i-1}$. Como q es un punto limite de E^*, entonces hay un $x \in E^*$ con $d(x, q) < 2^{-i}\delta$. Ya que $x \in E^*$, entonces hay un $n_i > n_{i-1}$ tal que $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$. Por lo tanto

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots$ Esto quiere decir que $\{p_n\}$ converge hacia q. En consecuencia $q \in E^*$.

3.3 Sucesiones de Cauchy

Definición 3.3 *Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, hay un entero N tal que $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq N$.*

En el estudio de las sucesiones de Cauchy, del mismo modo que en otros casos que encontraremos más adelante, será útil el siguiente concepto geométrico.

Definición 3.4 *Sea E un subconjunto de un espacio métrico X, y S el conjunto de todos los números reales de la forma $d(p, q)$ con $p \in E$ y $q \in E$. El sup de S se llama díametro de E.*
Si $\{p_n\}$ es una sucesión en X y E_N está constituido por los puntos p_N, $p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$, se ve fácilmente, como consecuencia de las dos definiciones anteriores, que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy

si, y solo si

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}(E_N) = 0.$$

Teorema 3.6

(a) *Si $\bar{E}$ es la cerradura de un conjunto E en un espacio métrico X, será:*

$$\operatorname{diam}(\bar{E}) = \operatorname{diam}(E).$$

(b) *Si K_n es una sucesión de conjuntos compactos en X, tales que $K_n \supset K_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ y si*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0,$$

$\bigcap_1^\infty K_n$ está constituido por exactamente un punto.

Demostración: *(a) Como $E \subset \bar{E}$, es claro que*

$$\operatorname{diam}(E) \leq \operatorname{diam}(\bar{E}).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$, y elijamos $p \in \bar{E}$ y $q \in \bar{E}$. Por la definición de $\bar{E}$, existen puntos p', q', en E tales que $d(p, p') < \varepsilon$, y $d(q, q') < \varepsilon$. De aquí,

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leq d\left(p, p'\right) + d\left(p', q'\right) + d\left(q', q\right) \\ &< 2\varepsilon + d\left(p', q'\right) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E) \end{aligned}$$

Se deduce que

$$\operatorname{diam}(\bar{E}) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E),$$

y como ε era arbitrario, queda demostrado (a).

(b) Hagamos $K = \bigcap_1^\infty K_n$. Por el Teorema 2.16, K es no vacío. Si contiene más de un punto, $\operatorname{diam}(K) > 0$. Pero para todo $n, K_n \supset K$, de modo que $\operatorname{diam}(K_n) \geq \operatorname{diam}(K)$, lo que contradice la hipótesis de ser $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$.

Teorema 3.7

(a) *En cualquier espacio métrico X, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

(b) *Si X es un espacio métrico compacto y $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{p_n\}$ converge hacia algún punto de X.*

(c) *En $\mathbb{R}^k$ toda sucesión de Cauchy converge.*

Nota: La diferencia entre la definición de convergencia y la de sucesión de Cauchy, es que el límite está incluido explícitamente en la primera y no en la segunda. Así el Teorema 3.7(b) permitirá averiguar si una sucesión dada converge o no, sin conocer el límite al que pueda tender.

El hecho (contenido en el Teorema 3.7) de converger una sucesión en $\mathbb{R}^k$ si, y solo si es de Cauchy, se llama comúnmente criterio de convergencia de Cauchy.

Demostración: *(a) Si $p_n \to p$ y $\varepsilon > 0$, hay un entero N tal que $d(p, p_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia*

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon$$

si $n \geq N$ y $m \geq N$. Por lo tanto $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

(b) Sea $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy en el conjunto compacto X. Para $N = 1, 2, 3, \ldots$, sea E_N el conjunto que consta de $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ Entonces

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}(\bar{E}_N) = 0, \tag{3.3.1}$$

debido a la Definición 3.4 y al Teorema 3.6(a). Cada $\bar{E}_N$ es compacto porque es un subconjunto cerrado de un espacio compacto X (Teorema 2.15). También $E_N \supset E_{N+1}$, así que $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$.

El Teorema 3.6(b) indica que hay un $p \in X$ único, que está en cada $\bar{E}_N$.

Dado $\varepsilon > 0$. Por (3.3.1) hay un entero N_0 tal que $\bar{E}_N < \varepsilon$ si $N \geq N_0$. Como $p \in \bar{E}_N$, se deduce que $d(p, q) < \varepsilon$ para cada $q \in \bar{E}_N$, de aquí que para cada $q \in E_N$. En otras palabras $d(p, p_n) < \varepsilon$ si $n \geq N_0$. Esto expresa exactamente que $p_n \to p$.

(c) Sea $\boldsymbol{x}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$. Defínase E_N como en (b) con $\boldsymbol{x}_i$ en lugar de p_i. Para algún N, $\operatorname{diam}(E_N) < 1$. El rango de $\{\boldsymbol{x}_n\}$ es la unión de E_N y el conjunto finito $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{N-1}\}$. Por esto $\{\boldsymbol{x}_n\}$ es acotado. Finalmente de (b) se deduce (c), debido a que todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}^k$ tiene cerradura compacta en $\mathbb{R}^k$ (Teorema 2.21).

Definición 3.5 *Si toda sucesión de Cauchy converge en un espacio métrico, se dice que este es completo.*

Entonces el Teorema 3.7 expresa que todos los espacios métricos compactos y los espacios euclidianos son completos. El Teorema 3.7 implica también que todo subconjunto cerrado E de un espacio métrico completo X es completo. (Toda sucesión de Cauchy en E es una sucesión de Cauchy en X, por esto converge hacia algún $p \in X$, y ciertamente $p \in E$ porque E es cerrado.) Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo es el espacio de todos los números racionales, $d(x, y) = |x - y|$.

El Teorema 3.1(c) y el ejemplo (d) de la Definición 3.1, demuestran que las sucesiones convergentes son acotadas, pero que las sucesiones acotadas, en $\mathbb{R}^k$ no son necesariamente convergentes. Sin embargo, hay un caso importante en el que convergencia es equivalente a acotación; esto sucede con las sucesiones monótonas en $\mathbb{R}^1$.

Definición 3.6 *Se dice que una sucesión $\{s_n\}$ de números reales es:*
(a) monótona creciente si $s_n \leq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$;
(b) monotona decreciente si $s_n \geq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

La clase de las sucesiones monótonas está constituida por las sucesiones crecientes y las decrecientes.

Teorema 3.8 *Supongamos que $\{s_n\}$ es monótona. $\{s_n\}$ converge si, y solo si es acotada.*

Demostración: *Supongamos que $s_n \leq s_{n+1}$ (la demostración es análoga en el otro caso). Sea E el* *rango de $\{s_n\}$. Si $\{s_n\}$ es acotada, sea s el sup de E. Será*

$$s_n \leq s \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N, tal que

$$s - \varepsilon < s_N \leq s$$

porque de otro modo $s - \varepsilon$ sería una cota superior de E. Como $\{s_n\}$ es creciente, $n \geq N$ implica que

$$s - \varepsilon < s_n \leq s,$$

lo que demuestra que $\{s_n\}$ converge (hacia s).

La inversa se deduce del Teorema 3.1(c).

3.4 Límites superior e inferior

Definición 3.7 *Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales con las siguientes propiedades: para cada número real M hay un entero N, tal que $n \geq N$ implica que $s_n \geq M$. Escribimos*

$$s_n \to +\infty.$$

Del mismo modo, si para todo número real M existe un entero N tal que $n \geq N$ implica que $s_n \leq M$, escribimos

$$s_n \to -\infty.$$

Se habrá observado que hemos utilizado el símbolo $\to$ (introducido en la Definición 3.1) para ciertos tipos de sucesiones divergentes, igual que para las convergentes, pero sin que se hayan cambiado las definiciones de convergencia y de límite, dadas en la Definición 3.1.

Definición 3.8 *Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales, y E el conjunto de los números x (en el sistema extendido de números reales) tales que $s_{n_k} \to x$ para alguna subsucesión s_{n_k}. Este conjunto E contiene todos los límites subsecuenciales definidos en la Definición 3.2 más, posiblemente, los números $+\infty$ y $-\infty$.*

Recordemos, ahora, las Definiciones 1.6 y 1.10 y hagamos

$$s^* = \sup E$$
$$s_* = \inf E$$

Los números s^* y s_* se llaman límites superior e inferior de $\{s_n\}$; utilizaremos la notación

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = s^*, \quad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = s_*.$$

Teorema 3.9 *Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales, y consideremos que E y s^* tienen el mismo significado que en la Definición 3.8. En estas condiciones, s^* tiene las dos propiedades siguientes:*
(a) $s^* \in E$.
(b) Si $x > s^*$, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica que $s_n < x$.
Además, s^* es el único número que posee las propiedades (a) y (b).
Para s_* se obtiene, evidentemente, un resultado análogo.

Demostración: *(a) Si $s^* = +\infty, E$ no está acotado superiormente, por lo que no lo está $\{s_n\}$ y existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ tal que $s_{n_k} \to +\infty$.*

Si s^* es real, E está acotado superiormente y existe al menos un límite subsecuencial, de modo que (a) se deduce de los Teoremas 3.5 y 2.11.

Si $s^* = -\infty$, E contiene solo un elemento, es decir $-\infty$, y no existe limite subsecuencial. Por tanto, para todo número real $M, s_n > M$ para, a lo sumo, un número finito de valores de n, de modo que $s_n \to -\infty$.

Queda así demostrado (a) para todos los casos posibles.

(b) Para demostrar (b), supongamos que existe un número $x > s^*$ tal que $s_n \geq x$ para infinitos valores de n. En este caso, existe un número $y \in E$ tal que $y \geq x > s^*$, en contradicción con la definición de s^*.

Por tanto, s^* satisface a (a) y (b).

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen dos números p y q que satisfacen (a) y (b), y sea $p < q$. Elijamos x de modo que $p < x < q$. Como p satisface (b), tenemos que $s_n < x$ para $n \geq N$. Pero en este caso, q no puede satisfacer a (a).

Ejemplo 3.1 *(a) Sea $\{s_n\}$ una sucesión que contiene a todos los números racionales. Todo número real es un límite subsecuencial y*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty, \quad \liminf s_n = -\infty$$

(b) Sea $s_n = (-1)^n[1 + (1/n)]$. Será

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1, \quad \liminf s_n = -1$$

(c) Para una sucesión $\{s_n\}$ de valores reales, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s.$$

Terminaremos esta sección con un teorema de gran utilidad, cuya demostración es elemental.

Teorema 3.10 *Si $s_n \leq t_n$ para $n \geq N$, con N, prefijado, se verifica que*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

3.5 Algunas sucesiones especiales

Calcularemos, ahora, los límites de algunas sucesiones que se presentan frecuentemente. Las demostraciones están basadas todas ellas en la siguiente observación: si $0 \leq x_n \leq s_n$ para $n \geq N$, siendo N un número dado, y si $s_n \to 0$, se verifica que $x_n \to 0$.

Teorema 3.11

(a) *Si* $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

(b) *Si* $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(d) *Si* $p > 0$ *y* α *es real,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(e) *Si* $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Demostración: *(a) Tomemos $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$. (Nótese que aquí se ha usado la propiedad arquimidiana del sistema de los números reales.)*

(b) Si $p > 1$, hagamos $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Será $x_n > 0$ y por la fórmula del binomio

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p$$

de modo que

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Por tanto, $x_n \to 0$. Si $p = 1$, (b) es evidente, y si $0 < p < 1$, se obtiene el resultado tomando los recíprocos.

(c) Hagamos $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Luego $x_n \geq 0$, y por el teorema del binomio

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Por tanto

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

(d) Sea k un entero tal que $k > \alpha; k > 0$. Para $n > 2k$.

$$(1+p)^n > \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

y de aquí

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k} \quad (n > 2k)$$

Como $\alpha - k < 0, n^{\alpha-k} \to 0$ por (a).

(e) Hagamos $\alpha = 0$ en (d).

3.6 Series

En lo que resta de este capítulo, todas las sucesiones y series que consideremos tendrán valores complejos, excepto cuando se indique lo contrario explícitamente. En el Ejercicio 15 se hace referencia a la extensión de alguno de los teoremas que siguen, a series con términos en $\mathbb{R}^k$.

Definición 3.9 *Dada una sucesión $\{a_n\}$ usaremos la notación*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \quad (p \leq q)$$

para expresar la suma $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$. A $\{a_n\}$ le asociamos una sucesión $\{s_n\}$, donde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

También utilizaremos para $\{s_n\}$ la expresión simbólica

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

o, más brevemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.6.1}$$

Al símbolo 3.6.1 le llamaremos serie infinita o solamente serie. A los números s_n se le llama sumas parciales de la serie. Si $\{s_n\}$ converge hacia s, diremos que la serie converge y escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Al número s se le llama suma de la serie; pero debe entenderse claramente que s es el límite de una sucesión de sumas y que no se obtiene simplemente por adición.
Si $\{s_n\}$ diverge, se dice que la serie diverge.

A veces, por conveniencia de notación, consideraremos series en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.6.2}$$

y frecuentemente, cuando no haya peligro de ambigüedad, o si la distinción es de escasa importancia, escribiremos simplemente Σa_n en lugar de (3.6.1) o (3.6.2).

Es evidente que todo teorema sobre sucesiones, se puede enunciar refiriéndose a las series (haciendo $a_1 = s_1$ y $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$) y viceversa, pero es, sin embargo, útil considerar ambos conceptos.

El criterio de Cauchy (Teorema 3.7) puede ser enunciado de nuevo en la forma siguiente:

Teorema 3.12 *Σa_n converge si, y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon \tag{3.6.3}$$

si $m \geq n \geq N$.

En particular, tomando $m = n$, (3.6.3) se convierte en

$$|a_n| \leq \varepsilon \quad (n \geq N).$$

En otras palabras:

Teorema 3.13 *Si Σa_n converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

La condición $a_n \to 0$, no es, sin embargo, suficiente para poder asegurar la convergencia de Σa_n. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Para demostrarlo, considérese el Teorema 3.18.

El Teorema 3.8 sobre sucesiones monótonas, tiene también una equivalencia inmediata para las series.

Teorema 3.14 *Una serie de términos no negativos converge si, y solo si sus sumas parciales forman una sucesión acotada.*

Veamos ahora otro método distinto de estudiar la convergencia, el llamado «criterio de comparación».

Teorema 3.15

(a) Si $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq N_0$, donde N_0 es un entero dado, y Σc_n converge, también converge Σa_n.

(b) Si $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq N_0$ y Σd_n diverge, también diverge Σa_n.

Nótese que (b) se aplica solamente a series de términos a_n no negativos.

Demostración: *Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq N_0$, tal que $m \geq n \geq N$ implica que*

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

por el criterio de Cauchy. De aquí, que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

y se deduce (a).

Además (b) se deduce de (a), porque si Σa_n converge, igual debe suceder con Σd_n [obsérvese que (b) se deduce también del Teorema 3.14].

El criterio de comparación es muy útil; para usarlo convenientemente, debemos familiarizarnos con cierto número de series de términos no negativos, cuya convergencia o divergencia es conocida.

3.7 Series de términos no negativos

La más sencilla de todas es, quizá, la serie geométrica.

Teorema 3.16 *Si $0 \leq x < 1$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

Demostración: *Si $x \neq 1$*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

de donde se deduce el resultado, si hacemos $n \to \infty$. Para $x = 1$; tenemos

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

que diverge, evidentemente.

En muchos casos que se encuentran en las aplicaciones, los términos de la serie decrecen monótonamente. Por tanto, es de particular interés el siguiente teorema de Cauchy. Lo que llama la atención del teorema es que una subsucesión más bien «estrecha» de $\{a_n\}$ determina la convergencia o divergencia de Σa_n.

Teorema 3.17 *Supongamos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solo si la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{3.7.1}$$

converge.

Demostración: *Por el Teorema 3.14, basta considerar el carácter de acotado de las sumas parciales. Sea*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Para $n < 2^k$

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + \left(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}\right) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

de modo que

$$s_n \leq t_k \tag{3.7.2}$$

Por otro lado, si $n > 2^k$

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + \left(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

de forma que

$$2s_n \geq t_k \tag{3.7.3}$$

Por (3.7.2) y (3.7.3), las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_k\}$ son, o ambas acotadas o ambas no acotadas, lo que completa la demostración.

Teorema 3.18 $\sum \frac{1}{n^p}$ *converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.*

Demostración: *Si $p \leq 0$, del Teorema 3.13 se deduce la divergencia. Si $p > 0$, es aplicable el Teorema 3.17 y llegamos a la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

Ahora, $2^{1-p} < 1$ si, y solo si $1 - p < 0$ y se deduce la conclusión, por comparación con la serie geométrica (hágase $x = 2^{1-p}$ en el Teorema 3.16).

Como nueva aplicación del Teorema 3.17 demostraremos que:

Teorema 3.19 *Si $p > 1$*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{3.7.4}$$

converge; si $p \leq 1$, la serie diverge.

Observación «$\log n$» expresa el logaritmo de n de base e (comparar con el Ejercicio 7, Cap. 1); el número e será definido inmediatamente (ver Definición 3.10). Comenzaremos la serie por $n = 2$, pues, $\log 1 = 0$.

Demostración: *La monotonía de la función logarítmica (que veremos con más detalle en el Cap. 8) implica que $\{\log n\}$ es creciente. Por tanto, $\{1/n \log n\}$ es decreciente y podemos aplicar el Teorema 3.17 a (3.7.4), lo que nos lleva a la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \tag{3.7.5}$$

y del Teorema 3.18 se deduce el Teorema 3.19.

Se puede, evidentemente, continuar este proceso. Por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \tag{3.7.6}$$

diverge, mientras que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \tag{3.7.7}$$

converge.

Podemos observar que los términos de la serie (3.7.6) difieren muy poco de los de la (3.7.7). No obstante, una diverge y la otra converge. Si continuamos el proceso que nos llevó del Teorema 3.18 al Teorema 3.19 y luego a (3.7.6) y (3.7.7), encontraremos parejas de series convergentes y divergentes cuyos términos todavía difieren menos que los de (3.7.6) y (3.7.7). Se puede pensar así, que debe de haber una situación límite de cierta naturaleza, una «frontera», con todas las series convergentes a un lado, y las divergentes al otro - al menos mientras se trate de series con coeficientes monótonos-. Esta noción de «frontera» es, en realidad, completamente vaga. Queremos recalcar lo siguiente: De cualquier forma que concretemos esta noción, la idea es falsa. Los Ejercicios 11(b) y 12(b) servirán de ilustración.

No queremos profundizar más en este aspecto de la teoría de la convergencia y enviamos al lector a la «Teoría y Aplicación de las Series Infinitas» de Knopp, capítulo IX, en particular el § 41.

3.8 El número e

Definición 3.10 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, si $n \geq 1$, y $0! = 1$

Como

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

la serie converge, y tiene sentido la definición. De hecho, la serie converge muy rápidamente y nos permite calcular e con mucha precisión.

Es interesante observar que también puede ser definido e por medio de otro proceso de límites; la demostración proporciona un buen ejemplo de operaciones con límites.

Teorema 3.20 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Demostración: *Sea*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Por el teorema del binomio

$$\begin{aligned} t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, $t_n \le s_n$*, de modo que*

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e, \tag{3.8.1}$$

por el Teorema 3.10. Además, si $n \ge m$*,*

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Sea $n\to\infty$*, conservando* m *fijo. Tendremos*

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

de modo que

$$s_m \le \liminf_{n\to\infty} t_n.$$

Si se hace $m\to\infty$*, tenemos finalmente*

$$e \le \liminf_{n\to\infty} t_n. \tag{3.8.2}$$

El teorema se deduce de (3.8.1) *y* (3.8.2).

La rapidez con que converge la serie $\sum \frac{1}{n!}$ puede comprobarse como sigue: Si s_n tiene el mismo significado que anteriormente, tendremos

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

de modo que

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} \tag{3.8.3}$$

Así, por ejemplo, s_{10} da una aproximación de e con un error menor de 10^{-7}. La desigualdad (3.8.3) tiene además interés teórico, pues nos permite demostrar la irracionalidad de e con mucha facilidad.

Teorema 3.21 *e es irracional.*

Demostración: *Supongamos que e es racional. Será $e = p/q$, siendo p y q enteros positivos. Por* (3.8.3),

$$0 < q!\,(e - s_q) < \frac{1}{q} \tag{3.8.4}$$

Por la hipótesis hecha, $q!e$ es entero. Como

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

es entero, vemos que $q!\,(e - s_q)$ es entero.

Como $q \geq 1$, (3.8.4) *implica la existencia de un entero entre 0 y 1 , con lo que hemos llegado a una contradicción.*

En realidad, e no es precisamente un número algebraico. Para una demostración sencilla de esto, véase la página 25 del libro de Niven, o la 176 del de Herstein, citados en la Bibliografía.

3.9 Criterios de la raíz y de la razón

Teorema 3.22 (Criterio de la raíz) *Dado Σa_n, hagamos $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tendremos*
(a) si $\alpha < 1$, Σa_n converge;
(b) si $\alpha > 1$, Σa_n diverge;
(c) si $\alpha = 1$, el método no da información.

Demostración: *Si $\alpha < 1$, podemos elegir β de modo que $\alpha < \beta < 1$ y un entero N tal que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

para $n \geq N$ [por el Teorema 3.9(b)]. Esto es, que $n \geq N$ implica

$$|a_n| < \beta^n.$$

Como $0 < \beta < 1$, $\Sigma\beta^n$ converge. La convergencia de Σa_n puede deducirse ya por el criterio de comparación.

Si $\alpha > 1$, por el Teorema 3.9, hay una sucesión $\{n_k\}$ tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha.$$

Por tanto $|a_n| > 1$ para infinitos valores de n, de modo que no se cumple la condición $a_n \to 0$, necesaria para la convergencia de Σa_n (Teorema 3.13).

Para demostrar (c), consideremos las series

$$\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}.$$

Para cada una de ellas $\alpha = 1$ pero la primera diverge y la segunda converge.

Teorema 3.23 (Criterio de la razón) *La serie Σa_n*

(a) converge, si $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,

(b) diverge si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ para $n \geq n_0$, donde n_0 es un número entero cualquiera, dado.

Demostración: *Si se cumple la condición (a), podemos hallar $\beta < 1$, y un entero N, tal que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

para $n \geq N$. En particular,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < \beta\, |a_N|\,,\\
&|a_{N+2}| < \beta\, |a_{N+1}| < \beta^2\, |a_N|\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|a_{N+p}| < \beta^p\, |a_N|\,.
\end{aligned}$$

esto es,

$$|a_n| < |a_N|\, \beta^{-N} \cdot \beta^n$$

para $n \geq N$ y se deduce (a) por el criterio de comparación, pues $\Sigma \beta^n$ converge.

Si $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para $n \geq n_0$, es fácil ver que no se cumple la condición $a_n \to 0$, y se deduce (b).

Nota: El saber que $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ no implica nada sobre la convergencia de Σa_n. Las series $\Sigma 1/n$ y $\Sigma 1/n^2$ demuestran esto.

Ejemplo 3.2 *(a) Consideremos la serie*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots,$$

para la cual

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\\
\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.
\end{aligned}$$

El criterio de la raíz indica su convergencia, el de la razón no conduce a conclusiones.

(b) Lo mismo es cierto para la serie

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots,$$

donde

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

pero

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}.$$

Observación: *El criterio de la razón, frecuentemente es más fácil de aplicar que el de la raíz, pues es usualmente más sencillo calcular cocientes que raíces n-ésimas, pero sin embargo, tiene más amplia aplicación el criterio de la raíz. Precisando más: cuando el criterio de la razón demuestra la convergencia, también el de la raíz; cuando éste no conduce a conclusiones, tampoco lo hace el de la razón. Esto es consecuencia del Teorema 3.24 y se aclara con los ejemplos anteriores.*

Ninguno de los dos es interesante en caso de divergencia. Los dos la deducen del hecho de que a_n no tiende a cero cuando $n\to\infty$.

Teorema 3.24 *Para toda sucesión $\{c_n\}$ de números positivos,*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n},$$
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Demostración: *Demostraremos la segunda desigualdad; la demostración de la primera es análoga. Hagamos*

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Si $\alpha=+\infty$, no hay nada que demostrar. Si α es finito, elijamos $\beta>\alpha$. Existe un entero N tal que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\beta$$

para $n\ge N$. En particular, para todo $p>0$.

$$c_{N+k+1}\le\beta c_{N+k}\quad(k=0,1,\ldots,p-1).$$

Multiplicando estas desigualdades, obtenemos

$$c_{N+p}\le\beta^p c_N$$

o

$$c_n\le c_N\beta^{-N}\cdot\beta^n\quad(n\ge N).$$

De aquí

$$\sqrt[n]{c_n}\le\sqrt[n]{c_N\beta^{-N}}\cdot\beta$$

De modo que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \beta, \tag{3.9.1}$$

por el Teorema 3.11(b). Como (3.9.1) *es cierto para todo* $\beta > \alpha$*, tenemos*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \alpha.$$

3.10 Series de potencias

Definición 3.11 *Dada una sucesión* $\{c_n\}$ *de números complejos, a la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.10.1}$$

se le llama serie de potencias. A los números c_n *se les llama coeficientes de la serie;* z *es un número complejo.*

En general, la serie convergerá o divergerá, según el valor de z. Más concretamente, a toda serie de potencias hay asociado un círculo, llamado círculo de convergencia, tal que (3.10.1) converge si z está en el interior del mismo y diverge si está en el exterior (para tener en cuenta todos los casos, debemos considerar el plano como el interior de un círculo de radio infinito, y un punto como un círculo de radio cero). El comportamiento en el círculo de convergencia es mucho más variado y no se puede definir tan sencillamente.

Teorema 3.25 *Dada la serie de potencias* $\Sigma c_n z^n$*, hagamos*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}$$

(Si $\alpha = 0$*,* $R = +\infty$*; si* $\alpha = +\infty$*,* $R = 0$*.)* $\Sigma c_n z^n$ *converge si* $|z| < R$ *y diverge si* $|z| > R$*.*

Demostración: *Hagamos* $a_n = c_n z^n$ *y apliquemos el criterio de la raíz:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}$$

Nota: A R se le llama radio de convergencia de $\Sigma c_n z^n$.

Ejemplo 3.3

(a) Para $\Sigma n^n z^n$*:* $R = 0$.

(b) Para $\sum \frac{z^n}{n!}$*:* $R = +\infty$ *(en este caso es más sencillo de aplicar el criterio de la razón que el de la raíz).*

(c) Para Σz^n *:* $R = 1$*. Si* $|z| = 1$*, la serie diverge, pues* $\{z^n\}$ *no tiende a 0 cuando* $n \to \infty$*.*

(d) *Para* $\sum \frac{z^n}{n}$: $R = 1$. *En el círculo de convergencia, la serie diverge para* $z = 1$, *y converge para todos los demás puntos de* $|z| = 1$. *Esta última afirmación será demostrada en el Teorema 3.44.*

(e) *Para* $\sum \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$. *La serie converge también en todos los puntos del círculo* $|z| = 1$, *por el criterio de comparación, ya que* $\left|z^n/n^2\right| = 1/n^2$ *si* $|z| = 1$.

3.11 Suma por partes

Teorema 3.26 *Dadas dos sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}$, *hagamos*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

si $n \geq 0$; *pongamos* $A_{-1} = 0$. *Si* $0 \leq p \leq q$, *tenemos*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{3.11.1}$$

Demostración:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} \left(A_n - A_{n-1}\right) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

y la última expresión de la derecha se ve fácilmente que es igual al segundo miembro de (3.11.1).

La fórmula (3.11.1), llamada «fórmula de sumación parcial» es útil en el estudio de series de la forma $\Sigma a_n b_n$, en particular cuando $\{b_n\}$ es monótona. Veremos, ahora, algunas aplicaciones.

Teorema 3.27 *Supongamos*
(a) *las sumas parciales* A_n *de* Σa_n *forman una sucesión acotada;*
(b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$;
(c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Entonces, $\Sigma a_n b_n$ *converge.*

Demostración: *Elijamos* M *de modo que* $|A_n| \leq M$ *para todo* n. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe un entero* N *tal que* $b_N \leq (\varepsilon/2M)$. *Para* $N \leq p \leq q$, *tenemos*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq M \left|\sum_{n=p}^{q-1} \left(b_n - b_{n+1}\right) + b_q + b_p\right| \\
&= 2M b_p \leq 2M b_N \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Deduciéndose la convergencia a partir del criterio de Cauchy. Observamos que la primera desigualdad de la cadena anterior depende del hecho de ser $b_n - b_{n+1} \geq 0$.

Teorema 3.28 *Supongamos que*
(a) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$;
(b) $c_{2m-1} \geq 0, c_{2m} \leq 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$;
(c) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
Entonces, Σc_n *converge.*

Las series para las que se cumple (b) se llaman «series alternantes»; el teorema es debido a Leibnitz.
Demostración: *Basta aplicar el Teorema 3.27 con* $a_n = (-1)^{n+1}$, *y* $b_n = |c_n|$.

Teorema 3.29 *Supongamos que el radio de convergencia de* $\Sigma c_n z^n$ *es 1 , que* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$, *y* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. $\Sigma c_n z^n$ *converge en todo punto del círculo* $|z| = 1$, *excepto, posiblemente, en* $z = 1$.

Demostración: *Hagamos* $a_n = z^n, b_n = c_n$. *Se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.27, pues*

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

si $|z| = 1, z \neq 1$.

3.12 Convergencia absoluta

Se dice que la serie Σa_n converge absolutamente si converge la serie $\Sigma |a_n|$

Teorema 3.30 *Si* Σa_n *converge absolutamente,* Σa_n *converge.*

Demostración: *La afirmación se deduce de la desigualdad*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

más el criterio de Cauchy.
Observación: *Para las series de términos positivos, la convergencia absoluta coincide con la convergencia.*

Si Σa_n converge, pero $\Sigma |a_n|$ diverge, decimos que Σa_n converge no absolutamente. Por ejemplo, la serie

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

converge no absolutamente (Teorema 3.28).

El criterio de comparación, lo mismo que el de la raíz y el de la razón, son en realidad métodos para hallar la convergencia absoluta y no pueden dar ninguna información para las series convergentes no absolutamente. Para salvar esta dificultad se utiliza a veces la suma por partes. En particular, las series de potencias convergen absolutamente en el interior del círculo de convergencia.

Veremos que con las series absolutamente convergentes se puede operar en gran manera como con las sumas finitas: podemos multiplicarlas término a término y variar el orden en que se efectúan las sumas, sin afectar a la suma de la serie. Por el contrario, para las series no absolutamente convergentes esto ya no es verdad y hay que tomar más precauciones al operar con ellas.

3.13 Adición y multiplicación de series

Teorema 3.31 *Si $\Sigma a_n = A$, y $\Sigma b_n = B$, será $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$, y $\Sigma c a_n = cA$, para todo c prefijado.*

Demostración: *Sea*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

de aquí

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *y* $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, *vemos que*

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B.$$

La demostración de la segunda afirmación es aún más sencilla.

Así, pues, pueden sumarse término a término dos series convergentes y la serie resultante converge hacia la suma de las dos series. El caso es más complicado cuando consideramos la multiplicación de dos series: para empezar, debemos definir el producto, lo que puede hacerse de varios modos; consideraremos el llamado «producto de Cauchy».

Definición 3.12 *Dadas Σa_n y Σb_n, hacemos*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y llamamos a Σc_n, producto de las dos series dadas.

Se puede justificar esta definición del modo siguiente: si tenemos dos series de potencias $\Sigma a_n z^n$ y $\Sigma b_n z^n$, las multiplicamos término a término y agrupamos las que tienen la misma potencia de z, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Haciendo $z = 1$, llegamos a la definición anterior.

Ejemplo 3.4 *Si*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

y $A_n \to A$ *y* $B_n \to B$, *no es inmediato que* $\{C_n\}$ *converja hacia* AB, *pues no es* $C_n = A_n B_n$. *La dependencia de* $\{C_n\}$ *respecto a* $\{A_n\}$ *y* $\{B_n\}$ *es complicada (ver la demostración del Teorema 3.32). Vamos a ver que el producto de dos series convergentes puede, de hecho, ser divergente.*

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

converge (Teorema 3.28). Formemos el producto de esta serie consigo misma, obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots,$$

de forma que

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Como

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2.$$

tendremos

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

con lo que se ve que la condición $c_n \to 0$, *necesaria para la convergencia de* Σc_n, *no se cumple.*

Antes de ver el teorema siguiente, debido a Mertens, debemos hacer notar que hemos considerado el producto de dos series no absolutamente convergentes.

Teorema 3.32 *Supongamos que*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente,*

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$,

(d) $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Se verificará que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Esto es, el producto de dos series convergentes converge, haciéndolo además hacia el valor previsto, si al menos una de las dos series converge absolutamente.

Demostración: *Hagamos*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Será

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \\ &= a_0\left(B + \beta_n\right) + a_1\left(B + \beta_{n-1}\right) + \cdots + a_n\left(B + \beta_0\right) \\ &= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \end{aligned}$$

Pongamos

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0.$$

Queremos demostrar que $C_n \to AB$. *Como* $A_nB \to AB$, *basta ver que*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{3.13.1}$$

Hagamos

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

[Aquí es donde utilizaremos (a)]. Sea dado $\varepsilon > 0$. *Por* (c), $\beta_n \to 0$. *Por tanto, podemos elegir* N *tal que* $|\beta_n| \le \varepsilon$ *para* $n \ge N$, *en cuyo caso*

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\le |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + |\beta_{N+1}a_{n-N-1} + \cdots + \beta_na_0| \\ &\le |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Conservando N *fijo y haciendo* $n \to \infty$, *tenemos*

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon\alpha,$$

ya que $a_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$. *Y, al ser arbitrario* ϵ, *queda demostrado* (3.13.1).

Otra interrogación que se presenta es si la serie Σc_n tiene, siempre que sea convergente, la suma AB. Abel demostró que la respuesta es afirmativa:

Teorema 3.33 *Si las series* Σa_n, Σb_n *y* Σc_n *convergen hacia* A, B, C *y* $c_n = a_0b_n + \cdots + a_nb_0$, *luego* $C = AB$.

En este caso, no es necesario hacer ninguna hipótesis sobre la convergencia absoluta. Daremos una demostración sencilla (que se basa en la continuidad de las series potenciales) después de ver el Teorema **??**.

3.14 Reordenamientos

Definición 3.13 *Sea* $\{k_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots,$ *una sucesión en la que cada entero positivo aparece una vez y solo una (esto es,* $\{k_n\}$ *es una función 1-1 de* J *en* J*, según la notación de la Definición 2.4). Haciendo*

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

decimos que $\Sigma a'_n$ *es un reordenamiento de* Σa_n*.*

Si $\{s_n\}$ y $\{s'_n\}$ son las sucesiones de las sumas parciales de Σa_n y $\Sigma a'_n$, se ve fácilmente que, en general, las dos sucesiones constan de términos completamente diferentes. Hemos llegado, ahora, al problema de determinar en qué condiciones convergerán todos los reordenamientos de una serie convergente, y si las sumas de ellas son necesariamente iguales.

Ejemplo 3.5 *Consideremos la serie convergente*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{3.14.1}$$

y uno de sus reordenamientos.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{3.14.2}$$

en la que siempre a dos términos positivos sigue uno negativo. Si s *es la suma de* (3.14.1)*.*

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Como

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

para $k \geq 1$*, vemos que* $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \cdots$*, donde* s'_n *es la* n*-ésima suma parcial de* (3.14.2)*. Por tanto,*

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n > s'_3 = \frac{5}{6}$$

esto es, (3.14.2) *no converge hacia* s *[dejamos al lector el comprobar que* (3.14.2)*, sin embargo, converge].*

Este ejemplo ilustra el teorema siguiente, debido a Riemann.

Teorema 3.34 *Sea* Σa_n *una serie convergente pero no absolutamente de números reales, y sean* $\alpha \leq \beta$ *dos números dados (en el sistema ampliado de números reales). Esto es,*

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$$

Existe un reordenamiento $\Sigma a'_n$, con sumas parciales, s'_n, tales que:

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta. \tag{3.14.3}$$

Demostración: *Sea*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Será $p_n - q_n = a_n$; $p_n + q_n = |a_n|$; $p_n \geq 0$; $q_n \geq 0$. Las series Σp_n y Σq_n serán ambas divergentes.

Porque si fueran convergentes,

$$\Sigma\,(p_n + q_n) = \Sigma\,|a_n|$$

sería convergente, contrariamente a la hipótesis. Como

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n$$

la divergencia de Σp_n y la convergencia de Σq_n (o viceversa) implica la divergencia de Σa_n lo que, de nuevo, va contra la hipótesis.

Representemos, ahora, por $P_1, P_2, P_3, \ldots$, los términos no negativos de Σa_n en el orden en que figuran y $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, los valores absolutos de los términos negativos de Σa_n en su orden.

Las series $\Sigma P_n, \Sigma Q_n$ difieren de $\Sigma p_n, \Sigma q_n$ solo en términos cero y son, por tanto, divergentes.

Construyamos las sucesiones $\{m_n\}, \{k_n\}$ tales que la serie

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots, \tag{3.14.4}$$

que, como se ve fácilmente, es un reordenamiento de Σa_n, satisfaga a (3.14.3).

Elijamos sucesiones con valores reales $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ tales que $\alpha_n \to \alpha$; $\beta_n \to \beta$; $\alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 > 0$.

Sean $m_1 k_1$ los menores enteros, para los que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

m_2, k_2 los enteros menores, para los cuales

$$\begin{aligned}
&P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2 \\
&P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} \\
&- \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2
\end{aligned}$$

continuando de este modo, lo que es posible, porque ΣP_n y ΣQ_n divergen.

Si x_n, y_n representan las sumas parciales de (3.14.4), cuyos últimos términos son $P_{m_n} - Q_{k_n}$, será

$$|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \quad |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}.$$

Como $P_n \to 0$ y $Q_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; vemos que $x_n \to \beta$, e $y_n \to \alpha$.

Finalmente, está claro que ningún número menor que α o mayor que β puede ser límite subsecuencial de las sumas parciales de (3.14.4).

Teorema 3.35 *Si Σa_n es una serie de números complejos que converge absolutamente, entonces cualquier reordenamiento de Σa_n converge, y todos ellos convergen a la misma suma.*

Demostración: *Sea un reordenamiento $\Sigma a'_n$, con sumas parciales s'_n. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $m \geq n \geq N$ implica*

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \varepsilon. \tag{3.14.5}$$

Ahora se escoge p de tal forma que los enteros $1, 2, \ldots, N$ estén todos en el conjunto $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (se está usando la notación de la Definición 3.13). Entonces si $n > p$, los números $a_1, \ldots, a_N$ se cancelarán al llevar a cabo la diferencia $s_n - s'_n$, de tal forma que por (3.14.5), $|s_n - s'_n| \leq \varepsilon$. Por consiguiente $\{s'_n\}$ converge hacia la misma suma que $\{s_n\}$.

3.15 Ejercicios

1. Demostrar que la convergencia de $\{s_n\}$ implica la de $\{|s_n|\}$. ¿Es verdad la inversa?

2. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

3. Si $s_1 = \sqrt{2}$, y
$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
demostrar que $\{s_n\}$ converge, y que $s_n < 2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Hallar los limites superior e inferior de la sucesión $\{s_n\}$ definida por
$$s_1 = 0; \quad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; \quad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$

5. Para cada dos sucesiones reales $\{a_n\}, \{b_n\}$, tenemos
$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$
siempre que la suma de la derecha no sea de la forma $\infty - \infty$.

6. Averiguar el comportamiento (convergencia o divergencia) de Σa_n, si
   (a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
   (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;
   (c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$;
   (d) $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$, para valores complejos de z.

7. Demostrar que la convergencia de Σa_n implica la de
$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$
si $a_n \geq 0$.

8. Si Σa_n converge y $\{b_n\}$ es monótona y acotada, $\Sigma a_n b_n$ converge.

9. Hallar el radio de convergencia de cada una de las series de potencias siguientes:

   (a) $\sum n^3 z^n$,

   (b) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$,

   (c) $\sum \frac{2^n}{n^2} z^n$,

   (d) $\sum \frac{n^3}{3^n} z^n$.

10. Supongamos que los coeficientes de la serie de potencias $\Sigma a_n z^n$ son enteros, y que un número infinito de ellos son distintos de cero. Demostrar que el radio de convergencia es, a lo más 1 .

11. Suponer que $a_n > 0, s_n = a_1 + \cdots + a_n$, y Σa_n diverge.

    (a) Demostrar que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

    (b) Demostrar que
    $$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{s_n}$ diverge.

    (c) Demostrar que
    $$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{s_n^2}$ converge.

    (d) ¿Qué se puede decir acerca de
    $$\sum \frac{a_n}{1+na_n} \text{ and } \sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}?$$

12. Suponer que $a_n > 0$ y Σa_n converge. Hacer
    $$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

    (a) Demostrar que
    $$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$
    si $m < n$, y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{r_n}$ diverge.

    (b) Demostrar que
    $$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

13. Demostrar que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes, converge absolutamente.

14. Si $\{s_n\}$ es una sucesión compleja, se define su media aritmética σ_n como

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a) Si $\lim s_n = s$, demostrar que $\lim \sigma_n = s$.

(b) Construir una sucesión $\{s_n\}$ que no converja, aunque $\lim \sigma_n = 0$.

(c) ¿Qué ocurriría si $s_n > 0$ para todo n y $\limsup s_n = \infty$, aunque $\lim \sigma_n = 0$?

(d) Hacer $a_n = s_n - s_{n-1}$, para $n \geq 1$. Mostrar que

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

Suponer que $\lim (n a_n) = 0$ y que $\{\sigma_n\}$ convergen. Demostrar que $\{s_n\}$ converge. [Esto proporciona un inverso de (a), pero con la suposición adicional de que $n a_n \to 0$.]

(e) Deducir la última conclusión a partir de una hipótesis más débil: Suponer $M < \infty, |n a_n| \leq M$ para todo n, y $\lim \sigma_n = \sigma$. Probar que $\lim s_n = \sigma$, completando lo siguiente:

Si $m < n$, entonces

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m} (\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} (s_n - s_i)\,.$$

Para estas i,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

Con $\varepsilon > 0$ fijo y asociado a cada n el entero m que satisface la desigualdad

$$m \leq \frac{n - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < m + 1.$$

Entonces $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ y $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. De aquí que

$$\limsup_{n \to \infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

Ya que ε fue arbitrario, $\lim s_n = \sigma$.

15. Puede ampliarse la Definición 3.9 en el caso para el cual los a_n pertenecen a algún $\mathbb{R}^k$ prefijado. La convergencia absoluta se define como la convergencia de $\Sigma\,|\mathrm{a}_n|$. Mostrar que los Teoremas 3.12, 3.13, 3.15(a), 3.22, 3.23, 3.27, 3.30, 3.31 y 3.35 son verdaderos en este caso más general. (Sólo se requieren modificaciones ligeras en las demostraciones.)

16. Si α es un número positivo fijo, escoger $x_1 > \sqrt{\alpha}, y$ definir $x_2, x_3, x_4, \ldots$, por medio de la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

(a) Demostrar que $\{x_n\}$ decrece monótonamente y que $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(b) Hacer $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$, y mostrar que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

de modo que al poner $\beta = 2\sqrt{\alpha}$.

$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(c) Este es un buen algoritmo para calcular raíces cuadradas, debido a que la fórmula de recurrencia es sencilla y la convergencia en extremo rápida. Por ejemplo, si $\alpha = 3$ y $x_1 = 2$, mostrar que $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ y que por lo tanto

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16}, \quad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}$$

17. Sea $\alpha > 1$ fijo. Si se toma $x_1 > \sqrt{\alpha}$ y se define

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(a) Demostrar que $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(b) Demostrar que $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(c) Demostrar que $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(d) Comparar la rapidez de convergencia de este proceso con la del descrito en el Ejercicio 16.

18. Reemplazar la fórmula de recurrencia del Ejercicio 16 por

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{\alpha}{p}x_n^{-p+1}$$

en donde p es un entero positivo fijo. Describir el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ resultantes.

19. Asociar a cada sucesión $a = \{\alpha_n\}$ en la cual α_n es 0 ó 2 , el número real

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Demostrar que el conjunto de todos los $x(a)$ es precisamente el conjunto de Cantor que se describió en la sección 2.4.1.

20. Suponer que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X, y que alguna subsucesión $\{p_{n_i}\}$ converge hacia un punto $p \in X$. Demostrar que la sucesión completa $\{p_n\}$ converge hacia p.

21. Demostrar el siguiente teorema, análogo al 3.6(b): Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y acotados en un espacio métrico completo $X, E_n \supset E_{n+1}$, y si

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0,$$

$\bigcap_1^\infty E_n$ consta solamente de un punto.

22. Supongamos que X es un espacio métrico completo, y $\{G_n\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X. Demostrar el teorema de Baire, es decir, que $\bigcap_1^\infty G_n$ es no vacío. (De hecho, es denso en X.) Sugerencia: Hallar una sucesión decreciente de entornos cerrados E_n, de modo que $\bar{E}_n \subset G_n$, y aplicar el Ejercicio 21 .

23. Supongamos que $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico X. Demostrar que la sucesión $\{d(p_n, q_n)\}$ converge. Sugerencia: Para cada m, n;

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$$

se deduce que

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

es pequeño si m y n son grandes.

24. Sea X un espacio métrico.

(a) Llamando a dos sucesiones de Cauchy $\{p_n\}, \{q_n\}$ equivalentes en X, si

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

Demostrar que esta es una relación de equivalencia.

(b) Sea X^* el conjunto de todas las clases de equivalencia asi obtenidas. Si $P \in X^*, Q \in X^*$, $\{p_n\} \in P, \{q_n\} \in Q$, definamos

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

Por el ejercicio 23, existe este límite. Demostrar que el número $\Delta(P, Q)$ permanece invariable si se sustituyen $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ por sucesiones equivalentes, y de aquí que Δ es una función distancia en X^*.

(c) Demostrar que el espacio métrico resultante X^* es completo.

(d) Para todo $p \in X$, existe una sucesión de Cauchy, cuyos términos son todos p; sea P_p el elemento de X^* que contiene esta sucesión. Demostrar que

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q)$$

para todo $p, q \in X$. En otras palabras, la aplicación φ definida por $\varphi(p) = P_p$ es una isometría (es decir, una aplicación que conserva las distancias) de X en X^*.

(e) Demostrar que $\varphi(X)$ es denso en X^*, y que $\varphi(X) = X^*$ si X es completo. Por (d), podemos identificar X y $\varphi(X)$ y considerar a X sumergido en el espacio métrico completo X^*. A X^* le llamamos la completez[1] de X.

25. Sea X el espacio métrico cuyos puntos son los números racionales, con la métrica $d(x, y) = |x - y|$. ¿Cuál es la completez, X^*, de este espacio? (Comparar con el Ejercicio 24.)

[1] N. del E.: Se ha extendido el uso de la palabra completez como traducción del adjetivo completness. La Academia ha aceptado el término compleción, y existe tendencia a emplear este vocablo.