CAPÍTULO 1

Sistema de los números reales

1.1 Introducción

Para que una presentación de los conceptos principales del análisis (tales como la convergencia, continuidad, diferenciación y la integración) sea satisfactoria, debe basarse en el concepto de número definido con exactitud. Sin embargo, aquí no se abordará el tema sobre los axiomas que gobiernan la aritmética de los enteros, pero se supondrá que se conocen bien los números racionales (es decir, los de la forma m/n, en donde m y n son enteros y $n \neq 0$).

El sistema de los números racionales visto como un campo o un conjunto ordenado, es inadecuado para muchos casos. (Los conceptos de campo y conjunto ordenado se definirán en las Secs. 1.2 y 1.3.) Por ejemplo, no existe un racional p tal que $p^2 = 2$. (Se demostrará esto a continuación.) Lo anterior conduce a la introducción de los llamados "números irracionales", que con frecuencia se representan como desarrollos decimales infinitos y se consideran "aproximados" por los decimales finitos correspondientes. Entonces la sucesión

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$$

"tiende a $\sqrt{2}$". Puede surgir la siguiente pregunta, a menos que el número irracional $\sqrt{2}$ esté evidentemente definido: ¿Qué quiere decir que la sucesión "tienda a"?

Esta clase de pregunta se puede contestar tan pronto como se construya el llamado "sistema de los números reales".

Ejemplo 1.1 *Empecemos demostrando que la ecuación*

$$p^2 = 2 \tag{1.1.1}$$

no se puede satisfacer por ningún número racional p. Para ello supongamos que se satisface: podremos escribir $p = m/n$, donde m y n son enteros y además podremos elegirlos de modo que los dos no sean pares. Supongamos que lo hemos hecho; entonces (1.1.1) *implica que*

$$m^2 = 2n^2, \tag{1.1.2}$$

Lo que muestra que m^2 *es par. Por tanto,* m *es par (si* m *fuera impar,* m^2 *también lo sería) y* m^2 *es divisible por 4. De aquí se deduce que el segundo miembro de* (1.1.2) *es divisible por 4, y por tanto* n^2 *es par, lo que implica que lo sea* n*.*

Por consiguiente, el suponer que se verifica (1.1.1) *nos lleva a la conclusión que* m *y* n *son los dos pares, en contra de la elección que para ellos habíamos hecho. Luego* (1.1.1) *es imposible para un número racional* p*.*

Examinemos ahora la situación algo más de cerca. Sea A *el conjunto de todos los números racionales positivos* p*, tales que* $p^2 < 2$*, y* B *el de todos aquellos para los que* $p^2 > 2$*. Veremos que* A *no contiene ningún número que sea mayor, ni* B *ninguno que sea menor, que todos los demás.*

Más explícitamente, para cada p *de* A *podemos hallar otro número racional* q*, también en* A*, tal que* $p < q$*; y para cada* p *de* B *otro* q *de* B *tal que* $q < p$*.*

Para esto, se asocia a cada número racional $p > 0$ *el número*

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \tag{1.1.3}$$

Por lo que

$$q^2 - 2 = \frac{2\left(p^2 - 2\right)}{(p + 2)^2}. \tag{1.1.4}$$

Si p *pertenece a* A*, entonces* $p^2 - 2 < 0$*, de* (1.1.3) *se puede ver que* $q > p$ *y de* (1.1.4) $q^2 < 2$*. Por lo que* q *pertenece a* A*.*

Si p *pertenece a* B*, entonces* $p^2 - 2 > 0$*, de* (1.1.3) *se puede ver que* $0 < q < p$ *y de* (1.1.4) $q^2 > 2$*. Por lo que* q *pertenece a* B*.*

Observación: *El objeto de la discusión anterior ha sido demostrar que el sistema de los números racionales tiene ciertas lagunas, a pesar del hecho de que entre dos números racionales, siempre hay otro: Si* $r < s$ *entonces* $r < (r + s)/2 < s$*. El sistema de los números reales llena estas lagunas, y es la razón principal del papel tan fundamental que desempeña este sistema en el análisis.*

Para dilucidar su estructura y la de los números complejos, se empezará con una discusión breve de los conceptos generales de conjunto ordenado y campo.

A continuación se da parte de la terminología estándar de la teoría de conjuntos que se usará en todo este libro.

Definición 1.1 *Si* A *es un conjunto cualquiera (cuyos elementos pueden ser números u objetos cualesquiera), se escribirá* $x \in A$ *para expresar que* x *es un miembro (o elemento) de* A*.*
Si x *no es un miembro de* A*, se escribirá:* $x \notin A$*.*
El conjunto que no contiene ningún elemento se llamará conjunto vacío. Si un conjunto tiene al menos un elemento, es un conjunto no vacío.
Si A *y* B *son conjuntos y todo elemento de* A *es un elemento de* B*, se dice entonces que* A *es un subconjunto de* B*, y se escribe* $A \subset B$*, o* $B \supset A$*. Si además existe un elemento de* B *que no pertenece a* A*, entonces* A *será un subconjunto propio de* B*. Obsérvese que* $A \subset A$ *para todo conjunto* A*.*
Si $A \subset B$ *y* $B \subset A$*, se escribe* $A = B$*. De otra manera será* $A \neq B$*.*

Definición 1.2 *En todo el capítulo 1, el conjunto de los números racionales se representará con una* $\mathbb{Q}$.

1.2 Conjuntos ordenados

Definición 1.3 *Si* S *es un conjunto, un orden en* S *es una relación representada por el símbolo* $<$ *y tiene las dos propiedades siguientes:*
(i) Si $x \in S$ *y* $y \in S$*, una y sólo una de las proposiciones siguientes es cierta:*

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

(ii) Si $x, y, z \in S$*, y si* $x < y$ *y* $y < z$*, entonces* $x < z$.

La proposición "$x < y$" se lee "x es menor que y" o "x es más pequeño que y" o también "x precede a y".

Con frecuencia conviene escribir $y > x$ en vez de $x < y$.

La notación $x \leq y$ indica que $x < y$ o $x = y$, sin especificar cuál de las dos se cumple. Dicho de otra manera, $x \leq y$ es la negación de $x > y$.

Definición 1.4 *Un conjunto ordenado es aquel en el que se ha definido un orden.*

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado si se define $r < s$ si $s - r$ es un número racional positivo.

Definición 1.5 *Supóngase que* S *es un conjunto ordenado, y* $E \subset S$. *Se dice que* E *es un conjunto acotado superiormente si existe un* $\beta \in S$ *tal que* $x \leq \beta$ *para cada* $x \in E$*, y a* β *se le denomina la cota superior de* E.

De la misma manera se definen las cotas inferiores (con $\geq$ en lugar de $\leq$).

Definición 1.6 *Supóngase que* S *es un conjunto ordenado,* $E \subset S$*, y* E *está acotado superiormente. Supóngase, además, que existe un* $\alpha \in S$ *con las siguientes propiedades:*

(i) α *es una cota superior de* E.

(ii) Si $\gamma < \alpha$*, entonces* γ *no es una cota superior de* E.

Entonces α *se denomina la mínima cota superior de* E *[de (ii) es evidente que a lo más hay una* α*] o el supremum de* E*, y se escribe*

$$\alpha = \sup E$$

La máxima cota inferior o infimum de un conjunto E *que está acotado inferiormente, se define de la misma manera: La proposición*

$$\alpha = \text{ínf}\, E$$

significa que α *es una cota inferior de* E *y que ninguna* β *con* $\beta > \alpha$ *es una cota inferior de* E.

Ejemplo 1.2 *(a) Considérense los conjuntos* A *y* B *del Ejemplo 1.1 como subconjuntos del conjunto ordenado* $\mathbb{Q}$. *El conjunto* A *está acotado superiormente. De hecho, las cotas superiores de* A *son los miembros de* B. *Como* B *no contiene un miembro más pequeño, entonces* A *no tiene mínima cota superior en* $\mathbb{Q}$.

De igual manera, B *está acotado inferiormente: el conjunto de todas las cotas inferiores de* B *consta de* A *y de todos los* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $r \leq 0$. *Como* A *no tiene un miembro más grande, entonces* B *no tiene máxima cota inferior en* $\mathbb{Q}$.

(b) Si existe $\alpha = \sup E$, *puede o no, ser* α *miembro de* E. *Sea por ejemplo,* E_1 *el conjunto de todos los* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $r < 0$. *Y* E_2 *el conjunto de todos los* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $r \leq 0$. *Entonces*

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0,$$

y $0 \notin E_1, 0 \in E_2$.

(c) Si E *consta de todos los números* $1/n$, *en donde* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Entonces* $\sup E = 1$ *y pertenece a* E, *el* $\inf E = 0$, *y no pertenece a* E.

Definición 1.7 *Se dice que un conjunto ordenado* S *tiene la propiedad de la mínima cota superior si lo siguiente es cierto:*
Si $E \subset S, E$ *no es vacío y está acotado superiormente, entonces* $\sup E$ *existe en* S.

El ejemplo 1.2(a) muestra que $\mathbb{Q}$ no tiene la propiedad de la mínima cota superior.

Ahora se mostrará que hay bastante relación entre las máximas cotas inferiores y las mínimas cotas superiores, y que todo conjunto ordenado que tenga la propiedad de la mínima cota superior tiene también la de la máxima cota inferior.

Teorema 1.1 *Supóngase que* S *es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior,* $B \subset S$ *y* B *es no vacio y acotado inferiormente. Ahora sea* L *el conjunto de todas las cotas inferiores de* B. *Entonces*

$$\alpha = \sup L$$

existe en S *y* $\alpha = \inf B$.
En particular, el $\inf B$ *existe en* S.

Demostración: *Como* B *está acotado inferiormente,* L *no es vacío. Ya que* L *consta exactamente de los* $y \in S$ *que además satisfacen la desigualdad* $y \leq x$ *para cada* $x \in B$, *es evidente que cada* $x \in B$ *es una cota superior de* L. *De aquí que* L *está acotado superiormente. La hipotesis referente a* S *implica por tanto, que* L *tiene un supremum en* S; *llamémosle* α.

Si $\gamma < \alpha$ *entonces (véase la Definición 1.8)* γ *no es cota superior de* L, *de aquí que* $\gamma \notin B$. *Y resulta que* $\alpha \leq x$ *para cada* $x \in B$. *Entonces* $\alpha \in L$.

Si $\alpha < \beta$ *se tiene que* $\beta \notin L$ *debido a que* α *es cota superior de* L.

Se ha mostrado que $\alpha \in L$, *pero que* $\beta \notin L$ *si* $\beta > \alpha$. *En otras palabras,* α *es una cota inferior de* B, *pero* β *no lo es si* $\beta > \alpha$. *Esto significa que* $\alpha = \inf B$.

1.3 Campos

Definición 1.8 *Un campo es un conjunto* F *con dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, que satisfacen los axiomas siguientes, (A), (M) y (D) llamados "axiomas de campo":*

(A) Axiomas para la adición

(A1) Si $x \in F$ *y* $y \in F$, *entonces su suma,* $x + y$ *está en* F.

(A2) La adición es conmutativa: $x + y = y + x$ *para toda* $x, y \in F$.

(A3) La adición es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *para toda* $x, y, z \in F$.

(A4) F *contiene un elemento 0 tal que* $0 + x = x$ *para cada* $x \in F$.

(A5) A cada $x \in F$ *le corresponde un elemento* $-x \in F$ *tal que*

$$x + (-x) = 0.$$

(M) Axiomas para la multiplicación

(M1) Si $x \in F$ *y* $y \in F$, *entonces su producto* xy *está en* F.

(M2) La multiplicación es conmutativa: $xy = yx$ *para toda* $x, y \in F$.

(M3) La multiplicación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$ *para toda* $x, y, z \in F$.

(M4) F *contiene un elemento* $1 \neq 0$ *tal que* $1x = x$ *para cada* $x \in F$.

(M5) Si $x \in F$ *y* $x \neq 0$, *entonces existe un elemento* $1/x \in F$ *tal que*

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(D) La ley distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

se cumple para toda $x, y, z \in F$.

Observación: *(a) Se acostumbra escribir (en cualquier campo)*

$$x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \ldots$$

en vez de

$$x + (-y), x \cdot \left(\frac{1}{y}\right), (x + y) + z, (xy)z, xx, xxx, x + x, x + x + x, \ldots$$

(b) Los axiomas de campo evidentemente se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales, siempre y cuando la adición y la multiplicación signifiquen lo acostumbrado. Por ende, $\mathbb{Q}$ es un campo.

(c) Aunque nuestro proposito no es el de estudiar campos (o cualquier otra estructura algebraica) con mucho detalle, vale la pena demostrar que algunas propiedades conocidas de $\mathbb{Q}$ son consecuencia de los axiomas de campo; una vez hecho esto, no se necesitará volver a hacerlo para los números reales o para los complejos.

Proposición 1.1 *Los axiomas para la adición implican las siguientes proposiciones:*
(a) Si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.
(b) Si $x + y = x$, entonces $y = 0$.
(c) Si $x + y = 0$, entonces $y = -x$.
(d) $-(-x) = x$.
La proposición (a) es la ley de la cancelación. Nótese que (b) asegura la unicidad del elemento cuya existencia se supuso en (A4), y que (c) hace lo mismo para (A5).

Demostración: *Si $x + y = x + z$, de los axiomas (A) se tiene*

$$\begin{aligned} y &= 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) \\ &= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z \end{aligned}$$

Esto demuestra (a). Tómese $z = 0$ en (a) para obtener (b), y $z = -x$ en (a) para obtener (c).

Como $-x + x = 0$, (c)(con $-x$ en lugar de x) esto produce (d).

Proposición 1.2 *Los axiomas para la multiplicación implican las proposiciones siguientes:*
(a) Si $x \neq 0$ y $xy = xz$, entonces $y = z$.
(b) Si $x \neq 0$ y $xy = x$, entonces $y = 1$.
(c) Si $x \neq 0$ y $xy = 1$, entonces $y = 1/x$.
(d) Si $x \neq 0$, entonces $1/(1/x) = x$.
La demostración es similar a la de la proposición 1.1 y por eso no se da aquí.

Proposición 1.3 *Los axiomas de campo implican las siguientes proposiciones, para cualquier $x, y, z \in F$:*
(a) $0x = 0$.
(b) Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$.
(c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
(d) $(-x)(-y) = xy$.

Demostración: $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. *En consecuencia, proposición 1.1(b) implica que $0x = 0, y$ por esto se cumple (a).*

Supóngase ahora $x \neq 0, y \neq 0$, pero que $xy = 0$. Entonces de (a) se tiene

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0,$$

una contradicción. Por lo tanto se cumple (b).

La primera igualdad en (c) proviene de

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$$

combinada con prop. 1.1(c); la otra mitad de (c) se demuestra de la misma forma. Finalmente de (c) y prop. 1.1(d) se obtiene

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy$$

Definición 1.9 *Un campo ordenado es un campo F que a su vez es un conjunto ordenado, y que tiene las siguientes propiedades:*
(i) $x + y < x + z$ si $x, y, z \in F$ y $y < z$.
(ii) $xy > 0$ si $x \in F, y \in F, x > 0$, y $y > 0$.
Si $x > 0$, se dice que x es positivo; si $x < 0$, entonces es negativo.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un campo ordenado.

En cada campo ordenado se aplican todas las reglas conocidas de las desigualdades: la multiplicación por cantidades positivas (negativas) preserva (invierte) las desigualdades, ningún cuadrado es negativo, etcétera. En la siguiente proposición se listan algunas de estas.

Proposición 1.4 *En todo campo ordenado, las siguientes proposiciones son verdaderas:*
(a) Si $x > 0$, entonces $-x < 0$, y viceversa.
(b) Si $x > 0$ y $y < z$, entonces $xy < xz$.
(c) Si $x < 0$ y $y < z$, entonces $xy > xz$.
(d) Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.
(e) Si $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.

Demostración:

(a) Si $x > 0$, entonces $0 = -x + x > -x + 0$, así que $-x < 0$. Si $x < 0$, entonces $0 = -x + x < -x + 0$, de manera que $-x > 0$. Esto demuestra (a).

(b) Debido a que $z > y$, se tiene $z - y > y - y = 0$, por consiguiente $x(z - y) > 0$, y por tanto

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy.$$

(c) De (a), (b) y la Proposicion 1.3(c) se obtiene,

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0,$$

de aquí que $x(z - y) < 0$, y en consecuencia $xz < xy$.

(d) Si $x > 0$, la parte (ii) de la Definición 1.9 nos da $x^2 > 0$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, por ende $(-x)^2 > 0$. Pero $x^2 = (-x)^2$, debido a la Proposición 1.3(d). Ya que $1 = 1^2, 1 > 0$.

(e) Si $y > 0$ y $v \leq 0$, entonces $yv \leq 0$. Pero $y \cdot (1/y) = 1 > 0$. En consecuencia, $1/y > 0$. De la misma forma, $1/x > 0$. Si se multiplican ambos miembros de la desigualdad $x < y$, por la cantidad positiva $(1/x)(1/y)$, se obtiene $1/y < 1/x$.

1.4 El campo real

Ahora se establecerá el teorema de existencia que es la base de este capítulo.

Teorema 1.2 *Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ con la propiedad de la mínima cota superior. Además, $\mathbb{R}$ contiene como subcampo a $\mathbb{Q}$.*

La segunda proposición significa que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y que cuando se aplican las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{R}$ a los miembros de $\mathbb{Q}$, éstas coinciden con las operaciones más comunes en los números racionales; también los números racionales positivos son elementos positivos de $\mathbb{R}$.

A los miembros de $\mathbb{R}$ se les denomina números reales.

Debido a que la demostración del Teorema 1.2 es bastante larga y un poco tediosa, se presenta en el Apéndice del capítulo 1. En realidad, la demostración construye $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema podría obtenerse a partir de esta construcción con un poco de esfuerzo adiciónal. No obstante, es preferible obtenerlo a partir del Teorema 1.2, debido a que éste proporciona una buena ilustración de lo que se puede hacer con la propiedad de la mínima cota superior.

Teorema 1.3

(a) Si $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces hay un entero positivo n tal que

$$nx > y.$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, y $x < y$, entonces existe un $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < p < y.$$

La parte (a) se conoce comúnmente como la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$. La parte (b) significa que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: es decir, entre dos números reales cualesquiera hay un racional.

Demostración: *(a) Sea A el conjunto de todos los nx, en donde n varía en los enteros positivos. Si (a) no fuera cierto, entonces y sería una cota superior de A, y A entonces tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$. Hagamos $\alpha = \sup A$. Ya que $x > 0, \alpha - x < \alpha$, y $\alpha - x$ no es una cota superior de A. Por consiguiente, $\alpha - x < mx$ para algún entero positivo m. De donde $\alpha < (m+1)x \in A$, lo cual es imposible, porque α es una cota superior de A.*

(b) Debido a que $x < y$, se tiene $y - x > 0$, y (a) proporciona un entero positivo n tal que

$$n(y - x) > 1.$$

Aplicando (a) nuevamente, se obtienen los enteros positivos m_1 y m_2 de tal manera que $m_1 > nx, m_2 > -nx$. Entonces

$$-m_2 < nx < m_1.$$

En consecuencia hay un entero m (con $-m_2 \leq m \leq m_1$) tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Si estas desigualdades se combinan, se obtiene

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

Como $n > 0$, se deduce que

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Esto demuestra (b), con $p = m/n$.

Ahora se demostrará la existencia de las raíces n-ésimas de los reales positivos. Esta prueba mostrará cómo puede manejarse en $\mathbb{R}$, la dificultad mencionada en la Introducción (la irracionalidad de $\sqrt{2}$).

Teorema 1.4 *Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ hay un número real $y > 0$, y uno solo, tal que $y^n = x$.*

Este número y se escribe $\sqrt[n]{x}$, o $x^{1/n}$.

Demostración: *Que como máximo hay un y con tal propiedad, es evidente, pues, $0 < y_1 < y_2$ implica $y_1^n < y_2^n$.*

Sea E el conjunto formado por todos los números reales positivos t, tales que $t^n < x$.

Si $t = x/(1+x)$, será $0 \leq t < 1$; por tanto, $t^n \leq t < x$, por lo que $t \in E$ y E no es vacío.

Si $t > 1 + x$, entonces $t^n > t > x$, así que $t \notin E$. Es decir, $1 + x$ es una cota superior de E.

El Teorema 1.2 implica por lo tanto, la existencia de

$$y = \sup E.$$

Para demostrar que $y^n = x$ se mostrará que cada una de las desigualdades $y^n < x$ y $y^n > x$ conduce a una contradicción.

La identidad $b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)$ produce la desigualdad

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

cuando $0 < a < b$.

*Ahora supóngase que $y^n < x$. Si se escoge h de tal forma que 0 $< h < 1$*y

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Si se hace $a = y, b = y + h$. Entonces

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n.$$

Es decir $(y+h)^n < x$, y $y + h \in E$. Ya que $y + h > y$, esto contradice el hecho de que y es una cota superior de E.

Suponiendo que $y^n > x$. Hágase

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Entonces $0 < k < y$. *Si* $t \geq y - k$, *se concluye que*

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x.$$

Por lo que $t^n > x$, *y* $t \notin E$. *Se deduce que* $y - k$ *es una cota superior de* E. *Pero* $y - k < y$, *esto contradice el hecho de que* y *es la mínima cota superior de* E.

En consecuencia $y^n = x$, *y esto completa la demostración.*

Corolario 1.1 *Si* a *y* b *son números reales positivos y* n *es un entero positivo, entonces*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Demostración: *Haciendo* $\alpha = a^{1/n}, \beta = b^{1/n}$. *Se tiene*

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

debido a que la multiplicación es conmutativa. [Axioma (M2) de la Definición 1.8]. Por lo tanto, la afirmación de unicidad del Teorema 1.4 muestra que

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Decimales Terminaremos esta parte, señalando la relación que existe entre los números reales y los decimales.

Sea $x > 0$ un número real, y n_0 el mayor entero, tal que $n_0 \leq x$.(*). Elegidos $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, sea n_k el mayor entero, para el cual

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

Sea, además, E el conjunto formado por los números

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.4.1}$$

En estas condiciones, x es el sup de E. El desarrollo decimal de x es

$$n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots \tag{1.4.2}$$

Inversamente, para todo decimal con desarrollo infinito (1.4.2) el conjunto E de los números (1.4.1) está acotado superiormente, y (1.4.2) es el desarrollo decimal del sup de E.

Como nunca utilizaremos números decimales, no entraremos en un estudio detallado.

1.5 El sistema extendido de los números reales

Definición 1.10 *El sistema extendido de los números reales está constituido por el campo real* $\mathbb{R}$ *al que se han añadido dos símbolos,* $+\infty$ *y* $-\infty$. *Se conservará el orden original en* $\mathbb{R}$, *y se definirá*

$$-\infty < x < +\infty$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Es evidente entonces, que $+\infty$ es una cota superior de cada subconjunto del sistema extendido de los números reales, y que cada subconjunto que no es vacío tiene una mínima cota superior. Por ejemplo, si E es conjunto que no es vacío ni acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces $\sup E = +\infty$ en el sistema extendido de los números reales.

Las mismas observaciones se aplican exactamente a las cotas inferiores.

El sistema extendido de los números reales no forma un campo, pero por conveniencia se acostumbra lo siguiente:

(a) Si x es un número real, se verifica que $-\infty < x < +\infty$ y

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) Si $x > 0$, será $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(c) Si $x < 0$, es $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Cuando es conveniente hacer distinción explícita entre los números reales por un lado y los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ por otro, los primeros se llaman finitos.

1.6 El campo complejo

Definición 1.11 *Un número complejo es un par ordenado de números reales* (a, b)*. “Ordenado” significa que* (a, b) *y* (b, a) *se consideran distintos si* $a \neq b$.
Sean $x = (a, b), y = (c, d)$ *dos números complejos. Se escribe* $x = y$ *si y solamente si* $a = c$ *y* $b = d$*. (Nótese que esta definición no es por completo superflua; debe pensarse en la igualdad de los números racionales representados como cocientes de enteros.) Se define*

$$x + y = (a + c, b + d)$$
$$xy = (ac - bd, ad + bc)$$

Teorema 1.5 *Las definiciones anteriores para la adición y la multiplicación vuelven al conjunto de todos los números complejos un campo, con* $(0, 0)$ *y* $(1, 0)$ *en lugar de 0 y 1.*

Demostración: *Simplemente se verificarán los axiomas de campo de la Definición 1.8. (Se usa la estructura de campo de* $\mathbb{R}$*, por supuesto.)*

Sean $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$.

(A1) es evidente.

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$.

(A3)

$$\begin{aligned}(x+y)+z =&(a+c,b+d)+(e,f)\\ =&(a+c+e,b+d+f)\\ =&(a,b)+(c+e,d+f)=x+(y+z).\end{aligned}$$

(A4) $x+0=(a,b)+(0,0)=(a,b)=x$.

(A5) Haciendo $-x=(-a,-b)$. *Entonces* $x+(-x)=(0,0)=0$.

(M1) es evidente.

(M2) $xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx$.

(M3)

$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac-bd,ad+bc)(e,f)\\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\\ &= (a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz)\end{aligned}$$

(M4) $1x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x$.

(M5) Si $x\neq 0$, *entonces* $(a,b)\neq(0,0)$, *lo cual significa que al menos uno de los números reales* a,b *es diferente de 0 . En consecuencia, por la Proposición 1.4(d)* $a^2+b^2>0$, *y se puede definir*

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Por tanto,

$$x\cdot\frac{1}{x}=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1.$$

(D)

$$\begin{aligned}x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f)\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ &= xy+xz.\end{aligned}$$

Teorema 1.6 *Para números reales cualesquiera a y b se tiene*

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\quad (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

La demostración es trivial.

El Teorema 1.6 muestra que los números complejos de la forma $(a,0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales correspondientes a. Por tanto, es posible identificar $(a,0)$ con a. Esta identificación hace del campo real un subcampo del campo complejo.

El lector puede haber notado que hasta ahora se han definido los números complejos sin hacer ninguna referencia a la misteriosa raíz cuadrada de -1. A continuación se muestra que la notación (a, b) es equivalente a la más acostumbrada $a + bi$.

Definición 1.12 $i = (0, 1)$.

Teorema 1.7 $i^2 = -1$.

Demostración: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Teorema 1.8 *Si a y b son dos números reales, será $(a, b) = a + bi$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b). \end{aligned}$$

Definición 1.13 *Si a, b son reales y $z = a + bi$, entonces al número complejo $\bar{z} = a - bi$ se le llama el conjugado de z. Los números a y b son la parte real y la parte imaginaria de z, respectivamente.*

Se escribirá algunas veces

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Teorema 1.9 *Si z y w son complejos, entonces*

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(b) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(c) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

(d) *$z\bar{z}$ es real y positivo (excepto cuando $z = 0$).*

Demostración: *(a),(b) y (c) son triviales. Para probar (d), escríbase $z = a + bi$, y nótese que* $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Definición 1.14 *Si z es un número complejo, su valor absoluto (o módulo) $|z|$ es la raíz cuadrada no negativa de $z\bar{z}$; es decir, $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.*

La existencia (y la unicidad) de $|z|$ se concluye a partir del Teorema 1.4 y la parte (d) del Teorema 1.9.

Nótese que cuando x es real, es $\bar{x} = x$, y por consiguiente $|x| = \sqrt{x^2}$. Asi que $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$.

Teorema 1.10 *Siendo z y w números complejos. Se tiene*

(a) $|z| > 0$ *a menos que* $z = 0$, $|0| = 0$,

(b) $|\bar{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z||w|$

(d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración: *(a) y (b) son evidentes. Si se hace $z = a + bi$, $w = c + di$, en donde a, b, c, d real. Entonces*

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = |z|^2|w|^2$$

o $|zw|^2 = (|z||w|)^2$. Ahora (c) deduce de la afirmación de unicidad del Teorema 1.4.

Para demostrar (d), nótese que $a^2 \leq a^2 + b^2$, por consiguiente

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para demostrar (e), nótese que $\bar{z}w$ es el conjugado de $z\bar{w}$, así que $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Y por último se obtiene (e) extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros.

Notación Si $x_1, \ldots, x_n$ son números complejos, escribimos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Terminamos esta sección con una desigualdad importante, corrientemente llamada desigualdad de Schwarz.

Teorema 1.11 *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números complejos, será*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Demostración: *Pongamos $A = \Sigma\, |a_j|^2\, ; B = \Sigma\, |b_j|^2\, ; C = \Sigma a_j \bar{b}_j$ (en todas las sumas de esta demostración, j toma los valores $1, \ldots n$). Si $B = 0$, será $b_1 = \cdots = b_n = 0$ y la conclusión es obvia. Supongamos, por tanto, que $B > 0$. Por el Teorema 1.9, tenemos*

$$\begin{aligned} \sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum \left(Ba_j - Cb_j\right)\left(B\bar{a}_j - \overline{Cb}_j\right) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B\left(AB - |C|^2\right). \end{aligned}$$

Como cada término de la primera suma es no negativo, vemos que

$$B\left(AB - |C|^2\right) \geq 0$$

Como $B > 0$, se sigue que $AB - |C|^2 \geq 0$, que es la desigualdad deseada.

1.7 Espacios euclidianos

Definición 1.15 *Para cada entero positivo k, sea $\mathbb{R}^k$ el conjunto de todas las k-tuplas ordenadas*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

donde $x_1, \ldots, x_k$ son números reales, llamados coordenadas de $\boldsymbol{x}$. Los elementos de $\mathbb{R}^k$ se llaman puntos, o vectores, especialmente cuando $k > 1$. Designaremos a los vectores por letras negritas. Si $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ y α un número real, haremos

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$$
$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k)$$

de modo que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ y $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$. Esto define la adición de vectores, lo mismo que la multiplicación de un vector por un número real (un escalar). Estas dos operaciones satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva (la demostración es elemental, comparando con las leyes análogas para los números reales) y hacen de $\mathbb{R}^k$ un espacio vectorial sobre el campo real. El elemento cero de $\mathbb{R}^k$ (a veces llamado origen o vector nulo) es el punto 0 , cuyas coordenadas son todas 0 .
Definimos también el llamado «producto interior» (o escalar) de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ por

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

y la norma de $\boldsymbol{x}$ por

$$|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

La estructura así definida (el espacio vectorial $\mathbb{R}^k$ con el producto interior y la norma) es el llamado k-espacio euclidiano.

Teorema 1.12 *Supongamos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k$ y que a es un número real. Será:*
(a) $|\boldsymbol{x}| \geq 0$
(b) $|\boldsymbol{x}| = 0$, *si, y solo si,* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
(c) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$
(d) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$
(e) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$
(f) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

Demostración: *(a), (b) y (c) son evidentes y (d) es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Schwarz. Por (d) tenemos*

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\\ &\leq |\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2\\ &= (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (e)*. Finalmente,* (f) *se sigue de* (e) *si sustituimos* $\boldsymbol{x}$ *por* $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ *y* $\boldsymbol{y}$ *por* $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$*.*

Nota El Teorema 1.12(a), (b) y (f) nos permite (véase Cap. 2) considerar $\mathbb{R}^k$ como un espacio métrico.

$\mathbb{R}^1$ (el conjunto de todos los números reales) suele llamarse recta, o recta real. Del mismo modo a $\mathbb{R}^2$ se le llama plano, o plano complejo (comparar las Definiciones 1.11 y 1.15. En estos dos casos la norma coincide con el valor absoluto del número real o complejo correspondiente.

1.8 Apéndice

Se demostrará en este Apéndice el Teorema 1.2 construyendo $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Esta construcción se dividirá en varios pasos.

Paso 1 Los miembros de $\mathbb{R}$ serán determinados subconjuntos de $\mathbb{Q}$, llamados cortaduras. Por definición, una cortadura es cualquier conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ con las tres propiedades siguientes:

(I) α no es vacío, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(II) Si $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, y $q < p$, entonces $q \in \alpha$.

(III) Si $p \in \alpha$, entonces $p < r$ para algún $r \in \alpha$.

Las letras $p, q, r, \ldots$ siempre denotarán números racionales, y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se usarán para simbolizar cortaduras.

Nótese que (III) significa simplemente que α no tiene un miembro más grande; (II) implica dos hechos que se usarán con libertad:

Si $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, entonces $p < q$.

Si $r \notin \alpha$ y $r < s$, entonces $s \notin \alpha$.

Paso 2 Al definir "$\alpha < \beta$" esto significará que: α es un subconjunto propio de β.

Comprobemos que esto cumple con los requisitos de la Definición 1.3.

Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, es evidente que $\alpha < \gamma$. (Un subconjunto propio de un subconjunto propio es un subconjunto propio.) También es claro que a lo más una de las tres relaciones siguientes

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

puede ser cierta para cualquier par α, β. Para mostrar que al menos una es cierta, supóngase que las primeras dos no lo son. Entonces α no es un subconjunto de β. De aquí que hay un $p \in \alpha$ con $p \notin \beta$. Si

$q \in \beta$, se deduce que $q < p$ (ya que $p \notin \beta$), en consecuencia $q \in \alpha$, por (II). Entonces $\beta \subset \alpha$. Debido a que $\beta \neq \alpha$, se concluye: $\beta < \alpha$.

Es por esto que ahora $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

Paso 3 El conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

Para demostrar esto, supongamos que A es un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$, y que $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A. Definase a γ como la unión de todas las $\alpha \in A$. Dicho de otra forma, $p \in \gamma$ si y solamente si $p \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Se demostrará a continuación que $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma = \sup A$.

Como A es no vacío, existe una $\alpha_0 \in A$. Esta α_0 no es vacía. Ya que $\alpha_0 \subset \gamma, \gamma$ es no vacía. En seguida, $\gamma \subset \beta$ (porque $\alpha \subset \beta$ para cada $\alpha \in A$), y por lo tanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. De aquí que γ satisface la propiedad (I). Para probar (II) y (III), tómese $p \in \gamma$. Entonces $p \in \alpha_1$ para alguna $\alpha_1 \in A$. Si $q < p$, entonces $q \in \alpha_1$, por esto $q \in \gamma$; esto demuestra (II). Si se selecciona $r \in \alpha_1$ de tal forma que $r > p$, se ve que $r \in \gamma$ (porque $\alpha_1 \subset \gamma$), y por lo tanto γ satisface (III).

Así que $\gamma \in \mathbb{R}$.

Es evidente que $\alpha \leq \gamma$ para cada $\alpha \in A$.

Supóngase ahora que $\delta < \gamma$. Entonces hay un $s \in \gamma$ y $s \notin \delta$. Debido a que $s \in \gamma, s \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Por esto $\delta < \alpha$, y δ no es una cota superior de A.

Esto da el resultado deseado: $\gamma = \sup A$.

Paso 4 Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se define $\alpha + \beta$ como el conjunto de todas las sumas $r + s$, en donde $r \in \alpha$ y $s \in \beta$.

Se define también 0^* como el conjunto de todos los números racionales negativos. Es claro que 0^* es una cortadura. Se verificará que los axiomas para la adición (véase Definición 1.8) son ciertos en $\mathbb{R}$, en donde 0^* desempeña el papel de 0 .

(A1) Se tiene que mostrar que $\alpha + \beta$ es una cortadura. Es evidente que $\alpha + \beta$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que no es vacío. Si se toman $r' \notin \alpha, s' \notin \beta$. Entonces $r' + s' > r + s$ para cualesquiera $r \in \alpha, s \in \beta$. Es por esto que $r' + s' \notin \alpha + \beta$. De aquí que $\alpha + \beta$ tiene la propiedad (I).

Si se toma $p \in \alpha + \beta$. Entonces $p = r + s$, con $r \in \alpha, s \in \beta$. Si $q < p$, es $q - s < r$, así $q - s \in \alpha$, y $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$. Entonces (II) se cumple. Si se escoge $t \in \alpha$ de tal manera que $t > r$. Entonces $p < t + s$ y $t + s \in \alpha + \beta$. De donde (III) se cumple.

(A2) $\alpha + \beta$ es el conjunto de todos los $r + s$, con $r \in \alpha, s \in \beta$. Por la misma definición, $\beta + \alpha$ es el conjunto de todos los $s + r$. Debido a que $r + s = s + r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, se tiene $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(A3) Como en el punto anterior, esto se deriva de la ley asociativa en $\mathbb{Q}$.

(A4) Si $r \in \alpha$ y $s \in 0^*$, entonces $r + s < r$, en consecuencia $r + s \in \alpha$. De aquí que $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Para obtener la inclusión opuesta, tómese $p \in \alpha$, y $r \in \alpha$, $r > p$. Por lo que $p - r \in 0^*$, y $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$. De donde $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Se concluye que $\alpha + 0^* = \alpha$.

(A5) Con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo y β el conjunto de todos los p con la propiedad siguiente:

Existe $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$.

Dicho de otra manera, algún número racional más pequeño que $-p$ ya no está en α.

Se mostrará que $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha + \beta = 0^*$.

Si $s \notin \alpha$ y $p = -s - 1$, entonces $-p - 1 \notin \alpha$, de aquí que $p \in \beta$. De esta manera β no es vacío. Si $q \in \alpha$, entonces $-q \notin \beta$. Así $\beta \neq \mathbb{Q}$. En consecuencia, β satisface (I).

Tomando un $p \in \beta$, y $r > 0$, de manera que $-p - r \notin \alpha$. Si $q < p$, entonces $-q - r > -p - r$, de aquí que $-q - r \notin \alpha$. Por lo que $q \in \beta$, y (II) se cumple. Poniendo $t = p + (r/2)$. Entonces $t > p$, y $-t - (r/2) = -p - r \notin \alpha$, de manera que $t \in \beta$. En consecuencia β satisface (III).

Se ha probado que $\beta \in \mathbb{R}$.

Si $r \in \alpha$ y $s \in \beta$, entonces $-s \notin \alpha$, por esto $r < -s, r + s < 0$. De aqui que $\alpha + \beta \subset 0^*$.

Para probar la inclusión opuesta, tómese $v \in 0^*$, y hágase $w = -v/2$. Entonces $w > 0,$ y hay un entero n tal que $nw \in \alpha$, pero $(n+1)w \notin \alpha$. (Nótese que esto depende del hecho de que $\mathbb{Q}$ tiene la propiedad arquimediana!) Poniendo $p = -(n+2)w$. Entonces $p \in \beta$, debido a que $-p - w \notin \alpha$, y

$$v = nw + p \in \alpha + \beta.$$

De aquí que $0^* \subset \alpha + \beta$.

Se concluye que $\alpha + \beta = 0^*$.

Por supuesto que esta β se denotará mediante $-\alpha$.

Paso 5 Habiendo demostrado que la adición definida en el Paso 4 satisface los axiomas (A) de la Definición 1.8, se concluye que la Proposición 1.1 es válida en $\mathbb{R}$, y se puede probar uno de los requisitos de la Definición 1.9:

$$\text{Si } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta < \gamma, \text{ entonces } \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

En verdad, es obvio de la definición de $+$ en $\mathbb{R}$ que $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$; si se tuviera $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, la ley de la cancelación (Proposición 1.1) implicaria $\beta = \gamma$.

También se deduce que $\alpha > 0^*$ si y solamente si $-\alpha < 0^*$.

Paso 6 La multiplicación en este contexto es un poco más fastidiosa que la adición, debido a que los productos de racionales negativos son positivos. Por esta razón nos restringiremos primero a $\mathbb{R}^+$, el conjunto de todas las $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$, entonces se define $\alpha\beta$ como el conjunto de todos los p tales que $p \leq rs$ para $r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0$.

Se define 1^* como el conjunto de todos los $q < 1$.

Entonces se cumplen los axiomas (M) y (D) de la Definición 1.8, con $\mathbb{R}^+$en lugar de F y 1^* desempeña el papel de 1.

Las demostraciones son tan similares a las ofrecidas en el Paso 4 que se omitirán.

En particular, nótese que el segundo requisito de la Definición 1.9 se cumple: Si $\alpha > 0^*$ y $\beta > 0^*$, entonces $\alpha\beta > 0^*$.

Paso 7 Se completa la definición de la multiplicación estableciendo que $\alpha 0^* = 0^*\alpha = 0^*$, y

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{si } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{si } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \text{si } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Los productos del miembro derecho se definieron en el Paso 6.

Habiendo probado (en el Paso 6) que los axiomas (M) se cumplen en $\mathbb{R}^+$, ahora es muy simple demostrarlos en $\mathbb{R}$, por medio de la aplicación repetida de la identidad $\gamma = -(-\gamma)$ que es parte de la Proposición 1.14. (Véase el Paso 5.)

La demostración de la ley distributiva

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

se divide en varias partes. Por ejemplo, supóngase que $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \beta + \gamma > 0^*$. Entonces $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$, y (debido a que ya se sabe que la ley distributiva se cumple en $\mathbb{R}^+$)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta)$$

Pero $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha\beta)$. Entonces

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

Las otras partes se tratan en la misma forma.

Se ha completado ya la demostración de que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado con la propiedad de la mínima cota superior.

Paso 8 Con cada $r \in \mathbb{Q}$ se asocia el conjunto r^* que consta de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tales que $p < r$. Es evidente que cada r^* es una cortadura; es decir, $r^* \in \mathbb{R}$. Estas cortaduras satisfacen las relaciones siguientes:

(a) $r^* + s^* = (r + s)^*$,

(b) $r^*s^* = (rs)^*$,

(c) $r^* < s^*$ si y solo si $r < s$.

Para probar (a) se escoge $p \in r^* + s^*$. Entonces $p = u + v$, en donde $u < r, v < s$. En consecuencia $p < r + s$, lo cual expresa que $p \in (r + s)^*$.

De manera inversa, supóngase que $p \in (r+s)^*$. Entonces $p < r+s$. Si se escoge t tal que $2t = r+s-p$, hágase

$$r' = r - t, s' = s - t.$$

Entonces $r' \in r^*, s' \in s^*$ y $p = r' + s'$, de modo que $p \in r^* + s^*$.

Esto demuestra (a). La demostración de (b) es similar.

Si $r < s$, entonces $r \in s^*$, pero $r \notin r^*$; en consecuencia $r^* < s^*$.

Si $r^* < s^*$ entonces hay un $p \in s^*$ tal que $p \notin r^*$. En consecuencia $r \leq p < s$, asi que $r < s$.

Esto demuestra (c).

Paso 9 Como se vio en el Paso 8, el reemplazo de los números racionales r por las correspondientes "cortaduras racionales" $r^* \in \mathbb{R}$ preserva las sumas, productos y el orden. Esto puede expresarse también, diciendo que el campo ordenado $\mathbb{Q}$ es isomorfo al campo ordenado $\mathbb{Q}^*$ cuyos elementos son las cortaduras racionales. Por supuesto que r^* no es de ninguna manera el mismo que r, pero las propiedades que nos interesan (la aritmética y el orden) son las mismas en los dos campos.

Esta identificación de $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}^*$ permite considerar a $\mathbb{Q}$ como un subcampo de $\mathbb{R}$.

En términos de esta identificación, la segunda parte del Teorema 1.19 se entiende bien. Nótese que ocurre lo mismo cuando los números reales se consideran como subcampo del campo complejo, y esto sucede también en un nivel mucho más elemental, cuando los enteros se identifican como un subconjunto determinado de $\mathbb{Q}$.

Es un hecho que dos campos ordenados cualesquiera con la propiedad de la mínima cota superior son isomorfos, pero esto no se demostrará aquí. Por lo tanto, la primera parte del Teorema 1.2 caracteriza completamente al campo real $\mathbb{R}$.

Los libros de Landau y Thurston que se citan en la Bibliografia se dedican completamente a sistemas de números reales. El capítulo 1 del libro de Knopp contiene una descripción más pausada de cómo se puede obtener $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Otra construcción presentada en la sección 5 del libro de Hewitt y Stromberg, define a cada número real como una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales (véase el Cap. 3).

Dedekind inventó las cortaduras que se usaron en esta sección. La construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ por medio de sucesiones de Cauchy se debe a Cantor. Cantor y Dedekind publicaron sus construcciones en 1872.

1.9 ejercicios

A menos que se especifique lo contrario, todos los números que se mencionen en estos ejercicios serán reales.

1. Si r es racional ($r \neq 0$) y x es irracional, demuestre que $r + x$ y rx son irracionales.

2. Demostrar que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 12 .

3. Demostrar la Proposición 1.2.

4. Sea E un subconjunto que no es vacío de un conjunto ordenado; supóngase que α es una cota inferior de E y β es una cota superior de E. Demostrar que $\alpha \leq \beta$.

5. Sea A un conjunto de números reales que no es vacío, que está acotado inferiormente. Si $-A$ es el conjunto de todos los números $-x$, en donde $x \in A$. Demostrar que

$$\text{ínf } A = -\sup(-A)$$

6. Sea $b > 1$ fijo.

(a) Si m, n, p, q son enteros, $n > 0$, $q > 0$, y $r = m/n = p/q$, demostrar que

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Por consiguiente tiene sentido definir $b^r = (b^m)^{1/n}$.

(b) Demostrar que $b^{r+s} = b^r b^s$ si r y s son racionales.

(c) Si x es real, y se define $B(x)$ como el conjunto de todos los números b^t, donde t es racional y $t \leq x$. Demostrar que

$$b^r = \sup B(r)$$

en la cual r es racional. En consecuencia tiene sentido definir

$$b^x = \sup B(x)$$

para cada real x.

(d) Demostrar que $b^{x+y} = b^x b^y$ para todos los reales x y y.

7. Con $b > 1, y > 0$ fijos, demostrar que hay un real único x tal que $b^x = y$, al completar el bosquejo siguiente. (A este x se le llama logaritmo de y de base b.)

   (a) Para cualquier entero positivo $n, b^n - 1 \geq n(b-1)$.

   (b) En consecuencia $b - 1 \geq n\left(b^{1/n} - 1\right)$.

   (c) Si $t > 1$ y $n > (b-1)/(t-1)$, entonces $b^{1/n} < t$.

   (d) Si w es tal que $b^w < y$, entonces $b^{w+(1/n)} < y$ para un n suficientemente grande; para ver esto aplíquese la parte (c) con $t = y \cdot b^{-w}$.

   (e) Si $b^w > y$, entonces $b^{w-(1/n)} > y$ para un n suficientemente grande.

   (f) Considerar A como el conjunto de todos los w tales que $b^w < y$, y mostrar que $x = \sup A$ satisface $b^x = y$.

   (g) Demostrar que x es único.

8. Demostrar que en el campo complejo no puede definirse ningún orden para que éste se vuelva un campo ordenado. Sugerencia: -1 es un cuadrado.

9. Supóngase que $z = a + bi, w = c + di$, y definase $z < w$ si $a < c$, y también si $a = c$, pero cuando $b < d$. Demostrar que esto convierte al conjunto de los números complejos en un conjunto ordenado. (Por razones obvias, a este tipo de relación de orden se le denomina orden diccionario o lexicográfico.) ¿Tiene este conjunto ordenado la propiedad de la mínima cota superior?

10. Supringase que $z = a + bi, w = u + iv, y$

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}.$$

Demostrar que $z^2 = w$ si $v \geq 0$ y que $(\bar{z})^2 = w$ si $v \leq 0$. Y conclúyase que cada número complejo (con una excepción) tiene dos raíces cuadradas complejas.

11. Si z es un número complejo, demostrar que existe un $r \geq 0$ y un número complejo w con $|w| = 1$ tal que $z = rw$. ¿z determina siempre de manera única a w y r?

12. Si $z_1, \ldots, z_n$ son complejos, demostrar que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,.$$

13. Si x, y son complejos, demostrar que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

14. Si z es un número complejo tal que $|z| = 1$, esto es, tal que $z\bar{z} = 1$, calcular

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2.$$

15. ¿En qué condiciones se produce la igualdad en la desigualdad de Schwarz?

16. Supongamos $k \geq 3$; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$; $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = d > 0$, y $r > 0$. Demostrar:

    (a) Si $2r > d$ hay una infinidad de $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k$ tales que

    $$|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}| = r$$

    (b) Si $2r = d$, hay solamente uno de tales $\boldsymbol{z}$.

    (c) Si $2r < d$, no hay tales $\boldsymbol{z}$.

    ¿Cómo se modificarian estas afirmaciones si k fuera 2 o 1 ?

17. Demostrar que

    $$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = 2|\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{y}|^2$$

    Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$. Interpretarlo geométricamente, como una propiedad de los paralelogramos.

18. Si $k \geq 2$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, demostrar que existe $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\boldsymbol{y} \neq 0$ pero $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$. ¿Es también verdad si $k = 1$?

19. Suponer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$. Hallar $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$ tales que

    $$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$$

    si, y solo si $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| = r$.

    (Solución: $3\boldsymbol{c} = 4\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $3r = 2|\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$.)

20. Refiriéndose al Apéndice, supóngase que la propiedad (III) se omite de la definición de cortadura, conservando las mismas definiciones de orden y la adición. Mostrar que el conjunto ordenado resultante tiene la propiedad de la mínima cota superior y que la adición satisface los axiomas (A1) al (A4) (¡con un elemento cero ligeramente diferente!) pero no el (A5).