

CAPÍTULO 4

Conceptos básicos de Vectores en \mathbb{R}^n

4.1. Vectores en \mathbb{R}^n

Definición 4.1.1 *Llamamos vector de \mathbb{R}^n a una lista ordenada de n números reales, la cual denotamos como*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aquí x_k lo llamamos k -ésima componente del vector \mathbf{x} .

El vector nulo o vector cero en \mathbb{R}^n viene dado por

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.1 El vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector de \mathbb{R}^4 y su primera, segunda, tercera y cuarta componentes son 5, 10, -3 y 5, en ese orden.

Los vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores de \mathbb{R}^n . A estos vectores los llamamos vectores canónicos de \mathbb{R}^n .

Definición 4.1.2 (Igualdad de vectores) *Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son iguales si y solo si $x_i = y_i \forall i \in 1, \dots, n$. Es decir,*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i = y_i \forall i \in 1, \dots, n.$$

Definición 4.1.3 *Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, se define la suma de vectores por*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Definición 4.1.4 *Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto por escalar por*

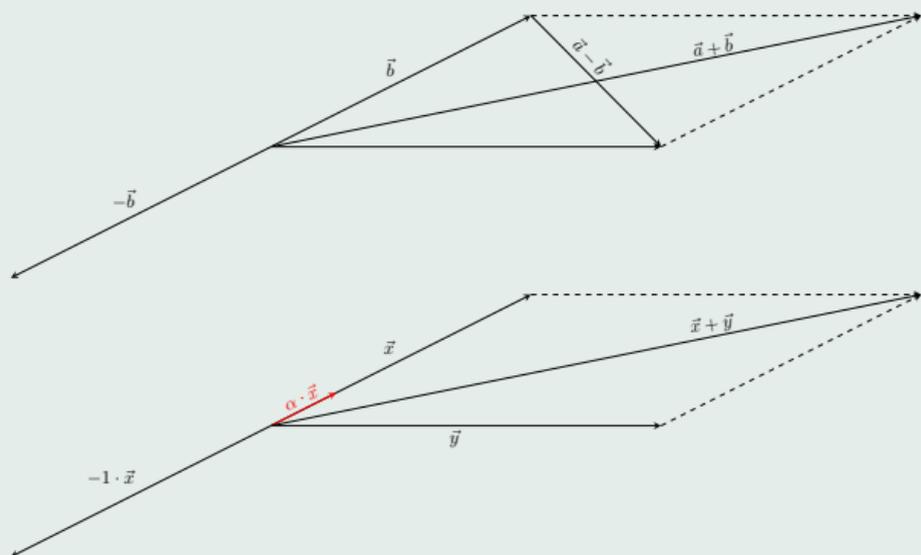
$$\lambda \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Definición 4.1.5 *Se define la resta de vectores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ por*

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

En la siguiente figura se muestra el significado gráfico de la suma, la resta, el producto por

escalar de vectores.



Definición 4.1.6 Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores de \mathbb{R}^n y sean α , β dos números reales. Entonces

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (Ley clau. para +).

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (Ley asoc. para $+$).
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Ley conmut. para $+$).
4. Existe un único vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ($\mathbf{z} = \mathbf{0}$). (Elemento neutro para la suma).
5. Para cada \mathbf{u} , existe un único vector $-\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (Existencia del opuesto para suma).
6. $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ (Ley clausura para el producto por escalar).
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ (Ley dist. del producto por escalar resp $+$).
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ (Ley dist. del producto por escalar respecto a $+$ de escalares).
9. $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) = \beta(\alpha\mathbf{u})$ (Ley asoc. respecto al producto por escalares).
10. $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$, si y solo si, $\alpha = 0$ ó $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 4.1 1. Calcule $(2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (5\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) + 7\mathbf{u}$.

2. Determine el vector \mathbf{x} tal que $2\mathbf{x} - 4\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$.

Definición 4.1.7 Diremos que dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos si y solo si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1.8 (Combinación Lineal) Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vectores de \mathbb{R}^n y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, al vector

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k$$

lo llamamos combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ los llamamos coeficientes de la combinación lineal.

Ejercicio 4.2 Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calcule la combinación lineal de ellos dada

por $3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$. ¿los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son combinaciones lineales de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Definición 4.1.9 (Conjunto Generado y Conjunto Generador) *Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lo representamos por*

$$V := \text{Gen} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \} = \{ \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

El conjunto V es generado por el conjunto $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ a este conjunto lo llamamos conjunto generador de V .

El conjunto generado es único mientras que el conjunto generador NO es único.

Ejemplo 4.1.2 *El siguiente conjunto representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que los elementos de V se escriben

$$\begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual indica que V está siendo generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definición 4.1.10 (Conjunto l.i.) *Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente si los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tales que*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

son todos cero.

Ejercicio 4.3 *Muestre que*

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ -5 \\ 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right) \right\},$$

es un conjunto l.i. y que

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -5 \end{array} \right) \right\},$$

es un conjunto l.d.

Note que todo conjunto de \mathbb{R}^n que contenga al vector nulo es un conjunto l.d.

Definición 4.1.11 (Producto escalar) *Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n , definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ el producto escalar entre \mathbf{u} y \mathbf{v} , como el escalar dado por*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i.$$

Ejercicio 4.4 *Dados $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $(3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.*

Teorema 4.1.1 Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores de \mathbb{R}^n y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (Ley conmutativa para \cdot)
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. (Distributividad de \cdot respecto de $+$)
3. $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$.
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, si y solo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Note que no tiene sentido la prop. asociativa para \cdot .

Definición 4.1.12 1. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{v} es **ortogonal** a \mathbf{w} si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

2. un subconjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortogonal** si $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

3. un subconjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto **ortonormal** si es un conjunto ortogonal y $\|\mathbf{v}_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \dots, n\}$.

Ejercicio 4.5 Encuentre α y β de forma que los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2\beta \\ 7 \end{pmatrix}$$

sean ortogonales.

Definición 4.1.13 (Norma) Definimos la norma de un vector \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , $\|\mathbf{u}\|$, como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Ejercicio 4.6 Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{w}\|$.

Teorema 4.1.2 *Dados los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que*

(a) $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$

(b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(c) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(d) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

La igualdad se obtiene, si y solo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdad triangular*).

La igualdad se cumple, si y solo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \geq 0$.

Demostración: *Para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos que $\|t\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \geq 0$*

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= t^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + t(2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = p(t) \end{aligned}$$

donde $p(t) = at^2 + bt + c$ es un polinomio cuadrático con $a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $b = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $c = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Como $a \geq 0$, la gráfica de $p(t)$ es una parábola cóncava hacia arriba con vértice en el semiplano superior. Recordando que el vértice de $p(t)$ es $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ entonces

$$0 \leq c - \frac{b^2}{4a} = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{4\|\mathbf{u}\|^2}$$

Además, si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= |\lambda\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|^2 = |\lambda| \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| \\ &= \|\lambda\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Obs: 1. La distancia euclidiana entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

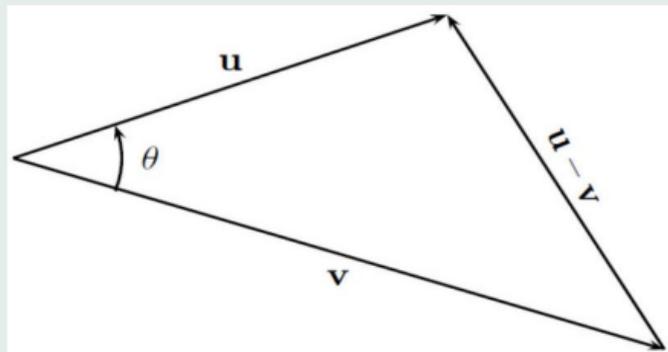
2. Cuando $\|\mathbf{w}\| = 1$, se dice que \mathbf{w} es un vector unitario.

Ejercicio 4.7 1. Halle la distancia entre $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Halle el vector unitario en la dirección $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definición 4.1.14 (Ángulo entre vectores) *Dados los vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} de \mathbb{R}^n , definimos el ángulo determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} como el menor giro positivo.*

Dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no nulos, siempre podemos construir un triángulo como el de la siguiente figura



Al aplicar el Teorema del Coseno a este triángulo, se obtiene

$$\begin{aligned}\|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \theta \\ \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \theta\end{aligned}$$

Entonces $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Ejercicio 4.8 Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule el ángulo entre ellos.

Definición 4.1.15 (Proyección ortogonal) Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y \mathbf{v} son vectores de \mathbb{R}^n , definimos la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} como el vector

$$\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$$

Llamamos a $\mathbf{v}_c = \mathbf{v} - \text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ es ortogonal a \mathbf{u} .

Ejercicio 4.9 Halle $\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ y la componente vectorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{u} (esto es \mathbf{v}_c), para cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{u} = e_1 \text{ y } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A continuación se introduce el producto cruz, producto únicamente definido para vectores en \mathbb{R}^3 .

Definición 4.1.16 (Producto vectorial o producto cruz) Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores. Se llama **producto vectorial** o **producto cruz** de \vec{a} y \vec{b} (en ese

orden) al vector,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

ó

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades 4.1.1 (Propiedades del producto vectorial) Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores en \mathbb{R}^3 y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades,

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$4. (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$$

Demostración: Para 2). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) = \theta.$$

Para 3). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.
\end{aligned}$$

Las otras demostraciones se dejan al lector.

Ejemplo 4.1.3 1. Sean $\vec{a} = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$.

2. Calcular $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k}$ y $\vec{k} \times \vec{i}$.

3. Calcular $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k}$ y note que en general $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Teorema 4.1.3 Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores no nulos en \mathbb{R} . Se tiene que,

$$1. \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \wedge \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

2. Si φ es el menor ángulo entre \vec{a} y \vec{b} entonces,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\varphi)$$

Demostración: Para ii). Sean \vec{a} y \vec{b} , luego

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\varphi))^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

Así, como $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $\sin(\varphi) \geq 0$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\varphi).$$

Corolario 4.1.1 *Dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} son paralelos si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

Observaciones:

1. Si los vectores \vec{a} y \vec{b} son dos lados de un triángulo, entonces el área A del triángulo está dada por,

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

2. $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector ortogonal a \vec{a} y \vec{b} .

Ejemplo 4.1.4 1. Sean $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Calcular un vector unitario ortogonal a \vec{a} y \vec{b} .

2. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(-1, 1, 2)$.

Definición 4.1.17 Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} tres vectores. Los productos $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ se llaman **producto escalar triple** y los productos de la forma $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ se llaman **producto vectorial triple**.

Teorema 4.1.4 Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores no nulos.

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

3. $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Demostración: Para 2). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \vec{c} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

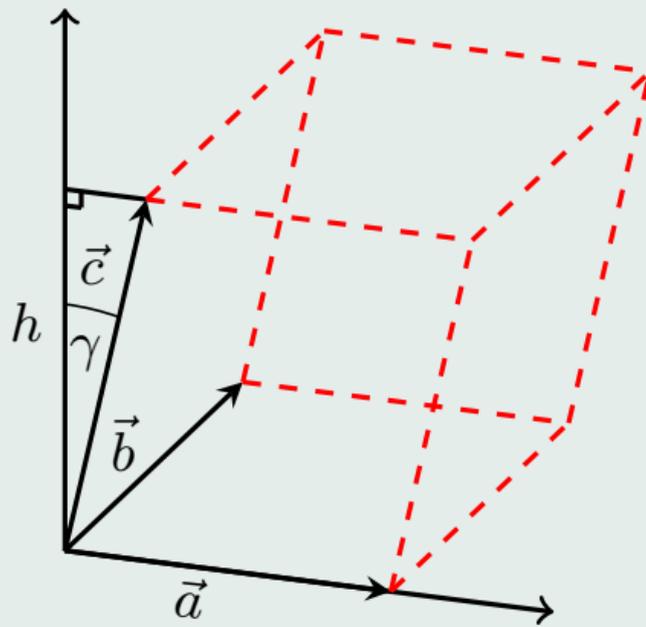


Figura 4.1: $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ volumen del paralelepípedo.

Para 3). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego basta notar que

$$\begin{aligned} h = \|\text{proy}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}\| &= \left\| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \right\| \\ &= \left| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \right| \|\vec{a} \times \vec{b}\| \\ &= \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \end{aligned}$$

Así

$$V = h \|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|.$$

4.1.1. Otras normas en \mathbb{R}^n

Como generalización de la norma Euclídeana (la usada usualmente) o norma-2, están las normas- p , definidas también en \mathbb{K}^n , cuales vienen dadas por:

1. Norma-1: $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$.
2. Norma-infinito: $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$.
3. Norma- p : $\|\mathbf{v}\|_p = (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{1/p}$.

Ejercicio 4.10 *Calcular las normas 1, 2 (euclidiana) e ∞ del vector $v = (3, 4, -12)$.*

En el siguiente gráfico podemos ver la diferencia entre las 3 normas más usuales en \mathbb{R}^2 . En cada gráfico están representados todos los puntos con norma igual a 1 bajo la norma respectiva.

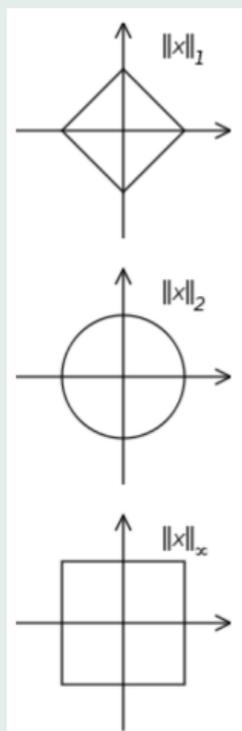


Figura 4.2: Gráfica de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_p = 1\}$
con $p = 1, 2, \infty$.