CAPÍTULO 9

Tranformaciones lineales

9.1. Tranformaciones lineales

Las transformaciones lineales son las funciones con las que trabajamos en el álgebra lineal. Se trata de funciones entre espacios vectoriales compatibles con la estructura, es decir con la suma y el producto por escalares.

Definición 9.1.1 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una* **transformación lineal** *de V en W es una función $T : V \to W$ tal que*

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, *para* $u, v \in V$,
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, *para* $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observación: $T : V \to W$ es transformación lineal si y sólo si

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u), \text{ para } v, u \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Algunas veces usaremos esto último para comprobar si una aplicación de V en W es una transformación lineal.

Ejemplo 9.1.1 *1. T dada por*

$$\begin{aligned} T :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &T(x, y) = (x - y, 2x, y + x) \end{aligned}$$

es una $T.L.$

2. T dada por

$$T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$T(p(x)) = \frac{d^2 p(x)}{dx^2},$$

es una $T.L.$

T dada por

$$\begin{aligned} T :& V \to V \\ & T(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, \end{aligned}$$

es una T.L. llamada **homotecia de razón** *a.*

Propiedades 9.1.1 *Sean T y L dos transformaciones lineales de V en W, entonces,*

1. $T(\theta_v) = \theta_w$.
2. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$.
3. *$T + L$ es una T.L.*
4. *λT es T.L., para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*
5. *Si $T : V \to W$ y $L : W \to Z$ son dos transformaciones lineales, entonces $L \circ T : V \to Z$, es una T.L.*

Observación: Denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W donde V y W son espacios de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. De 3. y 4. se tiene que $\mathcal{L}(V, W)$ es un subespacio del espacio de todas las funciones de V en W donde la función nula es el vector nulo de $\mathcal{L}(V, W)$.

Definición 9.1.2 (**Kernel o núcleo**) *Sea $T : V \to W$ una T.L. Se llama* **kernel** *o* **núcleo** *de T, al conjunto de todos los vectores de V tales que su imagen es el vector nulo de W, se denota por $Ker(T)$,*

$$Ker(T) = \{x \in V : T(x) = \theta_w\}.$$

Definición 9.1.3 (**Imágen**) *Se llama* **imágen** *de T al conjunto de las imágenes de todos los vectores de V, es decir, al recorrido de la función T. Se denota por $Im(T)$,*

$$Im(T) = Rec(T) = \{y \in W : \exists x \in V, T(x) = y\},$$

o también

$$Im(T) = \{T(x) : x \in V\}.$$

Proposition 9.1.1 *Sea $T : V \to W$ una T.L., entonces,*

1. *$Ker(T)$ es subespacio de V.*
2. *$Im(T)$ es subespacio de W.*

Demostración: Demostrar en clases.

Definición 9.1.4 (**Nulidad y rango**) *Sea $T : V \to W$ una T.L.. Se llama* **nulidad** *de T a la dimensión del $Ker(T)$ y se denota por $\eta(T)$. Se llama* **rango** *de T a la dimensión de la $Im(T)$ y se denota por $\rho(T)$.*

Ejemplo 9.1.2 *1.* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = -2(x, y),$$

es una T.L. (verificarlo). Muestre que $\eta(T) = 0$.

2. $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$T(p(x)) = p(1/3),$$

es una $T.L.$ *(la demostración de esta afirmación queda a cargo del lector). Encuentre* $Ker(T)$ *e* $Im(T)$.

Proposition 9.1.2 *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es base del espacio* V *y* $T \in \mathcal{L}(V, W)$*, entonces* $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ *genera la* $Im(T)$.

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 9.1.3 *Sea* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. T *es inyectiva si y sólo si* $Ker(T) = \{\theta_v\}$.

Observación: Si $T : V \to W$ es una $T.L.$ inyectiva y $\{x_1, \ldots, x_p\}$ es $L.I.$, entonces $\{T(x_1), \ldots, T(x_p)\}$ es $L.I.$.

Teorema 9.1.1 (**Dimensiones**) *Si* $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *entonces,* $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$.

Ejemplo 9.1.3 *Se sabe que la transformación lineal* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$T(p(x)) = p(1/3),$$

es tal que $dim(Ker(T)) = 2$ *y* $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}) = 1$. *Luego,*

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 3 = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})).$$

Teorema 9.1.2 (**Fundamental del álgebra lineal**) *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo y $\{w_1, \ldots, w_n\}$, vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que*

$$T(v_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ejemplo 9.1.4 *Sea $B = \{(1,2), (0,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y considere $w_1 = (-1,1,0)$, $w_2 = (0,-3,1) \in \mathbb{R}^3$. Encuentre $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,2) = (-1,1,0)$ y $T(0,-1) = (0,-3,1)$.*

9.1.1. Matriz asociada a una transformación lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{9.1.1}$$

de los w_i. Los escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ son las coordenadas de $T(v_j)$ en la base $\mathcal{B}'$. Por consiguiente, la transformación T está determinada por los mn escalares a_{ij} mediante la expresión (9.1.1).

Definición 9.1.5 *La matriz $m \times n$, A, definida por $[A]_{ij} = a_{ij}$, se llama matriz asociada de T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$; y se denota*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A.$$

.

Ejemplo 9.1.5 *1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida*

$$T(x, y, z) = (2x + y, 3y, x + 4z, z).$$

Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *y* $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^4$*. Encuentre la matriz asociada a* T *con respecto a las bases* B*,* B'*.*

2. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la transformación lineal definida por* $T(x, y, z) = (2x - y, y + z)$*. Encuentre la matriz asociada a* T *con respecto a las bases* B_1*,* B_2*.*

Proposition 9.1.4 *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *bases de* V *y* W *respectivamente y* A *una matriz de orden* $m \times n$ *con elementos en* $\mathbb{K}$*. Entonces existe una única transformación lineal* T *de* V *en* W *tal que* $[T]_{B_1 B_2} = A$*.*

Ejemplo 9.1.6 *La transformación lineal de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es?

Proposition 9.1.5 *Sea V y W un espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall\, v \in V. \tag{9.1.2}$$

Ejemplo 9.1.7 *Sea $T : \mathcal{B}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b, c+2d, b),$$

Encuentre la matriz asociada a T respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B_2 = \{(-2,2,2), (1,0,0), (1,1,0)\}.$$

Si $x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1/2 & 4 \end{pmatrix}$, *encuentre* $[T(x)]_{B_2}$.

Teorema 9.1.3 *Sean* V, W *y* Z *espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$*; sean* $T : V \to W$ *y* $U : W \to Z$ *transformaciones lineales. Si* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *y* $\mathcal{B}''$ *son bases de los espacios* V, W *y* Z, *respectivamente, entonces*

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \tag{9.1.3}$$

Demostración: Sean

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}, \quad \mathcal{B}'' = \{z_1, \ldots, z_l\}$$

y

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \; 1 \leq j \leq n; \qquad U(w_i) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k, \; 1 \leq i \leq m.$$

Es decir
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [a_{ij}] \qquad \text{y} \qquad [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = [b_{ij}].$$
Entonces
$$\begin{aligned}
(UT)(v_j) &= U(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} U(w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k \\
&= \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}) z_k.
\end{aligned}$$
Luego el coeficiente kj de la matriz $[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ es $\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$ que es igual a la fila k de $[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$

por la columna j de $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, en símbolos, si $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ y $C = [UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$, entonces

$$[C]_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} = F_k(B)C_j(A) = [BA]_{kj}.$$

Proposition 9.1.6 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, B y B', bases de V y W respectivamente. Si $T : V \to W$ y $S : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces*

1. $[T + S]_{BB'} = [T]_{BB'} + [S]_{BB'}$.
2. $[\lambda T]_{BB'} = \lambda[T]_{BB'}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 9.1.7 *Sea V espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V y $T, U : V \to V$ operadores lineales. Entonces*

1. $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.

2. Si T es inversible, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz inversible y

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Demostración:

1. Es inmediato del teorema anterior tomado $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'' = \mathcal{B}$.

2. Denotemos I al operador identidad de V, entonces I se puede escribir $I = TT^{-1}$, luego

$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$$

   y análogamente, $I = T^{-1}T$, luego

$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}T]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}.$$

   Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$.

Ejemplo 9.1.8 *Sean* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 3y, 4y - x)$ *y* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$. *Y considere las bases* $B_1 = (1, 0), (0, 1) = B_2$ *y* $B_3 = (1, 3), (2, 5)$. *Muestre que* $[LT]_{B_1B_2} = [L]_{B_2B_3}[T]_{B_1B_2}$.

9.1.1.1. Matriz de transición, matriz de cambio de base o de paso

Definición 9.1.6 *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión* n, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $B_2 = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, *bases de* V. *Sea* $I : V \to V$ *la transformación idéntica.* $[I]_{B_1B_2} = P$ *se llama* **de cambio de base** *o* **de paso** *de la base* B_1 *a* B_2. *Y* $[I]_{B_2B_1}$ *es la* **matriz de transición** *de* B_2 *a* B_1.

Ejemplo 9.1.9 *1. Sean* $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *y* $B_2 = \{(-1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, -1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$. *Hallar las matrices de cambio de base* P *y* Q.

9.1.2. Listado 7

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (\cos(x + y), \sin(z))$

   d) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)x + d$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, x^3)$

2. Determine una base para el $Ker(T)$ e $Im(T)$ donde T es la transformación lineal siguiente:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & z \end{pmatrix}$

   b) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2$

c) $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

d) $T:\mathcal{P}_2(x) \to \mathbb{R}^2$, $T(ax^2+bx+c) = (a-c, b+c)$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre el rango de T y una base para $Ker(T)$.

4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que: $T(1,0,0) = (2,1,-1)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$, $T(0,0,1) = (2,-1,1)$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre una base para $Ker(T)$ e $Im(T)$.

   c) Indique la nulidad y el rango de T.

5. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3x + y, x + z)$

   a) Encuentre una base para $Ker(T)$ y para $Im(T)$.

   b) Determine la nulidad y el rango de T.

6. Defina la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ es

$$[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 6 & 3 \\ -27/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

b) Encuentre las coordenadas de $T(5,-1)$ en la base B_2 usando la matriz asociada.

8. Sean $B_1 = \{1, t, t^2\}$ y $B_2 = \{t-1, t+1, t^2+1\}$ bases del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(R)$.

   a) Encuentre las matrices asociadas a la aplicación I (identidad) respecto de las bases B_1, B_2 ($[I]_{B_1 B_2}$) y B_2, B_1 ($[I]_{B_2 B_1}$).

   b) De las matrices obtenidas en a) use la que corresponda para encontrar las coordenadas del vector $v = 2t^2 + 5t - 9$ en la base B_2.

9. Considere la siguiente transformación lineal $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $D(p) = \frac{d}{dx}(p(x))$ y encuentre la matriz asociada respecto de la base canónica.

10. Sea $T : \mathcal{P}_2(R) \to \mathbb{R}$, $T(p(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(x)dx$. Encontrar la matriz asociada a T respecto de las bases $B_1 = \{1, x-1, x(x-1)\}$ y $B_2 = \{1\}$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 10 & 8 & 8 & -6 \\ 8 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que la nulidad de T es 2.

b) Sean $v_1 = (4, 7, -12, 0)$, $v_2 = (0, -5, 8, 4)$, $v_3 = (2, 1, -2, 2)$. Pruebe que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es $L.D.$ y que $v_1, v_2, v_3 \in Ker(T)$.

c) Sean v_1, v_2 como en b), $v_4 = (2, 1, -2, 1)$ y $v_5 = (1, 1, 1, 1)$. Acepte que $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y usando esta información encuentre una base para $Im(T)$.

d) Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de modo que $Ker(T) = \langle\{v_4, v_5\}\rangle$ y $Im(T) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

12. Determine una aplicación lineal de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$dim(Ker(T)) = 2 \quad y \quad Im(T) = \langle\{(2, -1, 0), (-1, 2, 2)\}\rangle.$$