

CAPÍTULO 1

Matrices

1.1 Preliminares de matrices

Definición 1.1.1 (Matriz) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y \mathbb{K} un cuerpo (\mathbb{R} , ó \mathbb{C}). Se llama función Matricial sobre \mathbb{K} a una función

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (i, j) \rightarrow A(i, j).$$

Se designa por a_{ij} al valor de A en el par (i, j) . Se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o bien $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, y se dice que A es una matriz de orden $m \times n$. También se escribe $A = (a_{ij})$, cuando está claro el número de filas y columnas de A .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces la matriz se dice real (compleja) o a valores reales (complejos). El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en \mathbb{K} , se denota por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se llama Matriz nula a la matriz A , tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y se denota por θ .

Definición 1.1.2 (Igualdad de Matrices) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices, entonces

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

1.2 Operaciones con matrices

Definición 1.2.1 (Suma de matrices) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces la matriz suma $A + B$ es

$$A + B = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Definición 1.2.2 (Multiplicación de matrices) Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. La matriz producto $C = AB$ es una matriz de $\mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Propiedades 1.2.1 (Suma y producto de matrices) Para cualquier $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se tiene:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $\exists \theta \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : A + \theta = A$.
- $\exists (-A) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : A + (-A) = \theta$.

Y para A, B, C matrices de modo que los productos estén definidos, tenemos:

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $\exists A \neq \theta, B \neq \theta : AB = \theta$.

Ejemplo 1.2.1 (En general el producto de matrices no es conmutativo) Basta considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.2 (Ejemplo de producto de Matrices) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

Entonces, solo el producto AB es posible y en tal caso:

$$AB = \begin{pmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2.3 (Producto de un escalar por una matriz) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, se define el producto $\lambda A = B$, por

$$\lambda A = (b_{ij}) \text{ con } b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propiedades 1.2.2 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$.
- $\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C), \forall C \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.4 (Transpuesta de una matriz) Para $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, se define la transpuesta de A como la matriz $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, donde

$$A^t = (b_{ij}) \text{ con } b_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Propiedades 1.2.3 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$.
- $(CD)^t = D^t C^t, \forall C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), D \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.5 (Matrices cuadradas) Una matriz cuadrada de n filas y n columnas es una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$. Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es:

Triangular superior si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Triangular inferior si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Diagonal si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Escalar si es diagonal y $a_{ii} = \lambda$, para $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$.

Identidad si es escalar y $a_{ii} = 1$, para $1 \leq i \leq n$.

Simétrica si $A^t = A$.

Antisimétrica si $A^t = -A$.

Observaciones: Denotaremos la matriz Identidad de orden n como I_n y cuando no exista confusión la denotaremos por I , además

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}).$$

Toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

1.3 Matrices invertibles

Definición 1.3.1 (Matrices Invertibles) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se dice invertible (o no singular) si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = I \wedge BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

La matriz B se llama inversa de A y se denota por A^{-1} .

Si A es invertible, entonces su inversa A^{-1} es única.

Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.3.1 Operaciones elementales

Definición 1.3.2 (Operaciones Elementales sobre filas) Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se llaman operaciones elementales sobre filas sobre A a las siguientes operaciones.

Intercambio de dos filas de A , la fila i con la fila j . Se escribe

$$f_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Multiplicar una fila de A por un escalar α no nulo. Para la fila i se escribe αf_i , $\alpha \in \mathbb{K}$.

Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra. Si a la fila j se suma α veces la fila i , entonces se escribe $f_j + \alpha f_i$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.3.1 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y F una operación elemental sobre filas cualquiera, entonces

$$F(A) = F(I)A.$$

Corolario 1.3.1 Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ y F es una operación elemental sobre filas, entonces

$$F(AB) = F(A)B.$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son operaciones elementales de filas, entonces

$$(F_n \circ \dots \circ F_2 \circ F_1)(AB) = (F_n \circ \dots \circ F_2 \circ F_1(A))B.$$

Teorema 1.3.2 Toda operación elemental sobre filas es invertible y su inversa es una operación elemental sobre filas del mismo tipo.

Definición 1.3.3 (Matrices equivalentes por filas) Dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se dicen equivalentes por filas si una se obtiene de la otra por aplicación de una o varias operaciones elementales sobre filas.

Teorema 1.3.3 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es equivalente por filas con I , entonces A es invertible.

Observaciones: 1.- Si A es invertible y F_1, \dots, F_n son operaciones elementales sobre filas que permiten pasar de A a la matriz identidad I , entonces la matriz inversa A^{-1} se obtiene aplicando, en el mismo orden, las operaciones elementales F_1, \dots, F_n a la matriz I .

2.- Para calcular A^{-1} se efectúan las operaciones elementales sobre filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Ejemplo 1.3.1 Encuentre la inversa de la matriz A dada por,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea invertible. Considere A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Notación: Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces designamos por $A_{ij} \in M_{m-1 \times n-1}(\mathbb{K})$ a la matriz obtenida de A eliminando la fila i y la columna j .

1.3.2 Determinante de una matriz

Definición 1.3.4 (Determinante) Se llama *Función determinante sobre \mathbb{K}* a la función

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \rightarrow \det(A),$$

tal que

- Si $n = 1$ y $A = (a)$, entonces $\det(A) = a$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, para cualquier $i = 1, 2, \dots, n$.

También se escribe $\det(A) = |A|$.

Propiedades 1.3.1 Para $A \in M_n(\mathbb{K})$ se tiene.

- Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.
- Si A es una matriz triangular, entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

- $\det(A^t) = \det(A)$.
- Si F es una operación elemental sobre filas que intercambia dos filas de A , es decir, $B = F(A)$, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
- Si F es una operación elemental sobre filas que multiplica una fila de A por un escalar α , es decir, $B = F(A)$, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.
- Si F es una operación elemental sobre filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j , es decir, $B = F(A)$, entonces $\det(B) = \det(A)$.
- Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$.
- Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A , entonces $\det(A) = 0$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Observación: Dado que $\det(A^t) = \det(A)$, se tiene que todas las propiedades indicadas también valen para las columnas.

Definición 1.3.5 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Se llama Menor de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz A_{ij} , es decir es el escalar $\det(A_{ij})$.

Se llama Cofactor de un elemento a_{ij} al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Si c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} , entonces

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} = \det(A), \quad \text{para cualquier } i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_{kj} = 0, \quad k \neq i \quad \text{para cualquier } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo: Calcular $|A|$, donde la matriz A viene dada por

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3.3 Matriz de cofactores y matriz adjunta

Definición 1.3.6 (Matriz de cofactores) Se llama Matriz de cofactores de la matriz A a la matriz que contiene los cofactores de cada elemento a_{ij} . Se escribe $\text{cof}(A) = A^c$.

Definición 1.3.7 (Matriz Adjunta) Se llama *Matriz Adjunta* de la matriz A a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe $\text{adj}(A) = (A^c)^t$.

Teorema 1.3.4 A es inversible sí y sólo sí $\det(A) \neq 0$.

Teorema 1.3.5 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Definición 1.3.8 (Rango de una matriz) Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se llama *rango* de A al orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo. Se escribe $r(A)$.

Observaciones:

- 1.- Si A y B son equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.
- 2.- Una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ se dice *escalonada por filas* si el primer elemento no nulo de cada fila de A está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. El número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas con A es igual a $r(A)$.

Ejemplo 1.3.2 Muestre que existe A^{-1} y encuentrela. Siendo A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el rango de la matriz B dada por,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.4 Ejercicios

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule AB , BA y $(AC^2 - I)$.
- b) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:
 - i) $-2X + C = B$,
 - ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2C$,
 - iii) $2C + X = B^2$.

2. Considere las siguientes definiciones:

- i) M se dice antisimétrica si $M^t = -M$, ii) M se dice ortogonal si $M^{-1} = M^t$.

Demuestre las siguientes proposiciones:

- Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
- Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
- Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.
- Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.
- Si A es una matriz simétrica y H es una matriz ortogonal, entonces $H^{-1}AH$ es una matriz simétrica.
- Si $A \in M_{n \times n}$ es simétrica y $B \in M_{n \times m}$, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

3. Calcule la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcule los números reales a y b , tales que: $A^2 + aA + bI = \theta$.
- De la ecuación anterior calcule una expresión para la inversa de A .
- Usando la expresión obtenida en (b) calcule la inversa de A .
- Compruebe el resultado obtenido.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

- Pruebe que $B^2 = B$.
- Muestre que $BA = \theta$.
- Pruebe que B es una matriz simétrica.