UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA LINEAL 520131
Listado 7 (Transformaciones lineales.)

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal tal que $T(x, y, z) = (-x + 4y - 2z, 3y - 2z, 4y - 3z)$.
   a) Encuentre, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ sea diagonal. **(En Práctica 1.)**
   b) Si T es diagonalizable, escriba la matriz diagonal.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Encuentre si existe, una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ sea diagonal.

3. ¿Es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizable?.

4. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$.
   a) Decida si T es o no diagonalizable. **(En Práctica 4.)**
   b) Si lo es, escriba la base B' respecto de la cual la matriz asociada a T es diagonal y escriba $[T]_{B'}$,
   c) Construya la matriz de paso de la base canónica B a la base B' y encuentre $[(1, 1, 1)]_{B'}$.

5. Sean $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$ los valores propios de una transformación lineal T y $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$, vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.
   a) Encuentre la transformación lineal T.
   b) Resuelva la ecuación $T(x, y, z) = (5x, 5y, 5z)$.
   c) Resuelva la ecuación $T(x, y, z) = (x, y, z)$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(En Práctica 6.)**
   a) Determine los valores propios de T.
   b) Determine los espacios propios asociados.
   c) Encontrar, si es posible, una base para $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a T respecto de ella sea diagonal.
   d) Resolver en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $T(u) = 2u$.

7. Dada la matriz A, determine valores y vectores propios, espacios propios asociados y decida si A es diagonalizable. En caso afirmativo, escriba la matriz P que diagonaliza a A.
   a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
   c) $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$
   d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ **(En Práctica 7d.)**

8. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una $T.L.$ definida por $T(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 3z)$
   a) Determine los valores propios de T.

b) Encuentre una base y la dimensión de los espacios propios asociados.

c) Decida si T es diagonalizable. En caso afirmativo, escriba la base B' de $\mathbb{R}^3$, formada por los vectores propios y encuentre la matriz asociada a T respecto de B'.

d) Halle una base de $\mathbb{R}^3$ de modo que la matriz asociada a la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida en la base canónica por $T(1,0,0) = (-3,-6,2/3)$, $T(0,1,0) = (2,5,-2/3)$, $T(0,0,1) = (6,9,0)$ sea una matriz diagonal respecto de dicha base.

9. Sea a un número real y considere la matriz **(En Práctica 9.)**

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores propios de A_a.

b) Determine los subespacios propios asociados a cada valor propio.

c) Muestre que A es diagonalizable verificando a que existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}A_aP$ es diagonal.