UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA LINEAL 520131
Listado 7 (Transformaciones lineales.)

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales? **(En práctica c) y d))**

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (\cos(x + y), \sin(z))$

   d) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)x + d$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, x^3)$

2. Determine una base para el $Ker(T)$ e $Im(T)$ donde T es la transformación lineal siguiente:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & z \end{pmatrix}$

   b) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2$

   c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$

   d) $T : \mathcal{P}_2(x) \to \mathbb{R}^2$, $T(ax^2 + bx + c) = (a - c, b + c)$ **(En práctica)**

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre el rango de T y una base para $Ker(T)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que: $T(1, 0, 0) = (2, 1, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 0, 1) = (2, -1, 1)$. **(En práctica)**

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre una base para $Ker(T)$ e $Im(T)$.

   c) Indique la nulidad y el rango de T.

5. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3x + y, x + z)$

   a) Encuentre una base para $Ker(T)$ y para $Im(T)$.

   b) Determine la nulidad y el rango de T.

6. Defina la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ es **(En práctica)**

$$[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 6 & 3 \\ -27/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.

a) Encuentre la ecuación de definición de T.

b) Encuentre las coordenadas de $T(5,-1)$ en la base B_2 usando la matriz asociada.

8. Sean $B_1 = \{1, t, t^2\}$ y $B_2 = \{t-1, t+1, t^2+1\}$ bases del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(R)$. **(En práctica)**

   a) Encuentre las matrices asociadas a la aplicación I (identidad) respecto de las bases B_1, B_2 ($[I]_{B_1 B_2}$) y B_2, B_1 ($[I]_{B_2 B_1}$).

   b) De las matrices obtenidas en a) use la que corresponda para encontrar las coordenadas del vector $v = 2t^2 + 5t - 9$ en la base B_2.

9. Considere la siguiente transformación lineal $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $D(p) = \frac{d}{dx}(p(x))$ y encuentre la matriz asociada respecto de la base canónica.

10. Sea $T : \mathcal{P}_2(R) \to \mathbb{R}$, $T(p(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(x)dx$. Encontrar la matriz asociada a T respecto de las bases $B_1 = \{1, x-1, x(x-1)\}$ y $B_2 = \{1\}$. **(En Práctica)**

11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 10 & 8 & 8 & -6 \\ 8 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Pruebe que la nulidad de T es 2.

   b) Sean $v_1 = (4, 7, -12, 0)$, $v_2 = (0, -5, 8, 4)$, $v_3 = (2, 1, -2, 2)$. Pruebe que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es $L.D.$ y que $v_1, v_2, v_3 \in Ker(T)$.

   c) Sean v_1, v_2 como en b), $v_4 = (2, 1, -2, 1)$ y $v_5 = (1, 1, 1, 1)$. Acepte que $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y usando esta información encuentre una base para $Im(T)$.

   d) Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de modo que $Ker(T) = \langle\{v_4, v_5\}\rangle$ y $Im(T) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

12. Determine una aplicación lineal de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que: **(En Práctica)**

$$dim(Ker(T)) = 2 \quad y \quad Im(T) = \langle\{(2, -1, 0), (-1, 2, 2)\}\rangle.$$