UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA LINEAL 520131
Listado 5 (Espacios vectoriales.)

1. Sean U, V, W, Z los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$,
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
$W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$,
$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = 2z\}$.
Caracterice los elementos de cada uno de los siguientes espacios:
   a) $U + V$
   b) $U + W$
   c) $V + W$
   d) $W + Z$
   e) $U \cap W$
   f) $V \cap W$
   g) $U \cap Z$

En práctica 1.c) y 1.g).

2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.
   a) $\{(3, 6, 1), (2, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$
   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **En práctica 2.b).**
   c) $\{t^3 - t^2 + 4t + 1, \quad 2t^3 - 2t^2 + 9t - 1, \quad t^3 + 6t - 5, \quad 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5\}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

3. Demuestre que los polinomios $\{(1 - t)^3,\ (1 - t)^2,\ (1 - t),\ 1\}$, generan el espacio de los polinomios de grado menor o igual que tres. **En práctica.**

4. Sean $S_1 = \{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \operatorname{sen}(x)\cos(x)\}$ y $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x)\}$. Muestre que los vectores de cada conjunto son $L.I.$

5. Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:
   a) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$,
   b) $Y = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}$,
   c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x = 3y = z\}$,
   d) $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$,
   e) $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$
   f) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & d & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$,
   g) $T = \langle\{7 - x^2, x^2 + 1, x^2 - 1\}\rangle$,
   h) $S = \langle\{\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\}\rangle$,
   i) $R = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$,
   j) $Q = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$,
   k) $P = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$.

En práctica 5.a), 5.k).

6. Considere el conjunto $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por escalar definida por
$$\alpha p(x) = \alpha p'(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$
¿Es $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ un espacio vectorial con estas operaciones?. **En práctica.**

7. Considere la ecuación $x - 2y + 3z = 0$.
   a) Muestre que el conjunto solución S de esta ecuación es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   b) Encuentre una base para S y su dimensión.

8. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S_1 = \{u, v, w\}$ un subconjunto $L.I$ de V. Demuestre que: $S_2 = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ es también $L.I.$

9. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$
   $V = \langle\{-1, 2, 1), (0, 0, 1)\}\rangle$
   Caracterice los subespacios $U + V$ y $U \cap V$. **En práctica.**

10. Encuentre la dimensión del subespacio $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = d\right\}$.

11. Encuentre la dimensión del espacio $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : 2b - c = 0\}$. **En práctica.**

12. Dados los subespacios $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + c = 0\right\}$ y $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : 2b - d = 0\right\}$.

    a) Caracterice el subespacio $U \cap V$.

    b) ¿Es $U + V$ suma directa?.

13. Considere el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y - z = 0\}$ y el subespacio T de $\mathbb{R}^3$ generado por $(3, -1, 1)$.

    a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

    b) Determine una base para $S + T$ y decida si ésta es una suma directa.

En práctica.