

ALGEBRA LINEAL 520131

Listado 1 (Matrices)

1.- Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule AB , BA y $(AC^2 - I)$.

b) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

i) $-2X + C = B$, ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2C$, iii) $2C + X = B^2$. (En práctica ii)

2.- Considere las siguientes definiciones:

i) M se dice antisimétrica si $M^t = -M$, ii) M se dice ortogonal si $M^{-1} = M^t$.

Demuestre las siguientes proposiciones: (En práctica d), e)

a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

c) Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.

d) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.

e) Si A es una matriz simétrica y H es una matriz ortogonal, entonces $H^{-1}AH$ es una matriz simétrica.

f) Si $A \in M_{n \times n}$ es simétrica y $B \in M_{n \times m}$, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

3.- Calcule la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$.

(En práctica f))

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los números reales a y b , tales que: $A^2 + aA + bI = \theta$.

b) De la ecuación anterior calcule una expresión para la inversa de A .

c) Usando la expresión obtenida en (b) calcule la inversa de A .

d) Compruebe el resultado obtenido.

5.- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

(En práctica)

a) Pruebe que $B^2 = B$.

b) Muestre que $BA = \theta$.

c) Pruebe que B es una matriz simétrica.